Matematička indukcija

Materijal pripremio Milojica Jaćimović

Podsjećanje: Iz Cermelo-Frenkelovog sistema aksioma teorije skupova izvodi se sljedeće tvrdjenje: *Postoji trojka* $\langle N, s, 1\rangle$, *gdje je* N *skup,* $s-$*unarna operacija i* 1 *element skupa* N, *koja zadovoljava uslove*

(i) $s : N \to N$ *je injekcija;*

(ii) $s(n) \neq 1$ *za svako* $n \in N$*;*

(iii) Ako je $M \subseteq N$ *takava da* $1 \in N$ *i iz* $n \in M$ *slijedi* $s(n) \in M$*, onda je* $M = N$
Svojstva (i) - (iii) se nazivaju *Peanovim aksiomama*, $s(n)$ je *sljedbenik* elementa $n \in N$, a svojstvo (iii) je it princip matematičke indukcije, ili kratko princip indukcije.

U skupu N definišu se opearcije " $+$ " i " $\cdot$ " na sljedeći

$$m + 1 := s(m); m + s(n) = s(m + n)$$

$$m \cdot 1 = m; m \cdot s(n) = mn + m.$$

Dalje, ako su $m \in N$ i $n \in N$ i ako postoji $k \in n$ takvo da je $n + k = m$, onda kažemo da je n manje od m i pišemo $n < m$; ako je $n < m$ ili $n = m$ tada pišemo $n \leq m$.

Strukturu $\langle N, +, \cdot, \leq, 1\rangle$ nazivamo *sistemom prirodnih brojeva* ili *skupom prirodnih brojeva.*

Pri tome ako su $\langle N, +, \cdot, \leq, 1\rangle$ i $\langle N', +', \cdot', \leq', 1'\rangle$ dva sistema prirodnih brojeva tada postiji tačno jedna bijekcija $f : N \to N'$, takva da je

$$f(n + m) = f(n) +' f(m)$$

$$f(n \cdot m) = f(n) \cdot' f(m)$$

$$m \leq n \Longleftrightarrow f(m) \leq f(n).$$

Kratko kažemo da postiji tačno jedan sistem prirodnih brojeva

Napomenimo da je princip matematičke indukcije ekvivalentan sa tzv. *principom dobrog uredjenja* prema kojem

Svaki podskup skupa prirodnih bojeva sadrži najmanji element.

Ova dva principa su potpuno saglasna sa intutivnim shvatanjem skupa prirodnih brojeva, izgradjenim u školi. Na primjerima ćemo predstaviti metod matemtičke indukcije zasnovan na principu indukcije

U dokazivanju da je neko tvrdjenje $T(n)$ tačno za svaki prirodan broj n, princip matematičke indukcije ćemo koristiti na sljedeći način:

Prvi korak (baza indukcije). Dokazaćemo da je tačno tvrdjenje $T(1)$.

Drugi korak (induktivni korak): Dokazaćemo da ako je tačno tvrdjenje $T(n)$ tada je tačno i tvrdjenje $T(n+1)$

Tada, prema principu matematičke inducije, slijedi da je tvrdjenje $T(n)$ tačno za svako $n \in N$.

Primjer 1. Da li je za svaki prirodan broj n tačna jednakost

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}.$$

Lijevu stranu jednakosti označimo sa L_n a desnu sa D_n. Dakle,

$$L_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

$$D_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}.$$

Sa $T(n)$ označimo tvrdjenje $L_n = D_n$ a sa M skup prirodnih brojeva za koje je ta jednakost tačna. Prirodno je početi provjerom da li je jednakost tačna za $n = 1$, zatim za $n = 2$, zatim za $n = 3$ ali se u tim provjerama moramo zaustaviti. Dobijamo da je $L_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, D_1 = \frac{1}{2}$. Dalje je $L_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, D_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. i $L_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}, D_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$. Dakle, $1 \in M, 2 \in M, 3 \in M$. Pitanje koje se prirodno postavlja: da li se na osnovu ovih provjera može zaključiti da je za svako $n \in N$, $L_n = D_n$, tj. da li je $M = N$. Uočimo da tu jednakost nismo dokazali. Nismo recimo provjerili da je $L_{100} = D_{100}$.tj. da li $100 \in M$. Napomenimo da je jednakost tačna (ubrzo ćemo je dokazati metodom matematičke indukcije) ali je mi za sada nismo dokazali. Ako dokažemo da je jednakost tačna za neke konkretne prirodne brojeve, još uvijek ne možemo tvrditi da je ona tačna za sve priridne brojeve. Zbog toga ćemo izmijeniti pristup. Pretpostavićemo da je $D_n = L_n$ i dokazati da je tada $L_{n+1} = D_{n+1}$. Dakle, iz pretpostavke $L_n = D_n$ slijedi da je

$$L_{n+1} = L_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$D_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - 2\frac{1}{2n+2} = D_{n+1}.$$

Dakle, jednakost je tačna za $n = 1$ (imali smo $L_1 = D_1$) i za svako $n \in$ iz jednakosti $L_n = D_n$ slijedi $L_{n+1} = D_{n+1}$. Prema principu matematičke indukcije ,slijedi da je za svako $n \in N$, $L_n = D_n$.

Primjer 2. Izračunati

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Jednostavno se provjerava da je

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Dakle, ako sa M označimo skup koji se sastoji od prirodnih brojeva za koje je $S_n = \frac{n}{n+1}$, tada imamo da $1 \in M, 2 \in M, 3 \in M, 4 \in M$. Opet se postavlja pitanje: da li smo ovim dokazali da je za svako $n \in N$, $S_n = \frac{n}{n+1}$. U ovakvom načinu dokazivanja nešto nedostaje. Zapravo, jednakost će biti dokazana tek ako dokažemo još da za svako $n \in N$ iz $S_n = \frac{n}{n+1}$ slijedi $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

Imamo da je

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Time je jednakost $S_n = \frac{n}{n+1}$ dokazana.

Primjer 3. Primijetimo da su vrijednosti kvadratnog trinoma $T(n) = n^2 + n + 41$, za $n = 1, n = 2, n = 3n = 4, n = 5, n = 6, n = 7, n = 8, n = 9, n = 10$ prosti brojevi: $T(1) = 43, T(2) = 47, T(3) = 53, T(4) = 61, T(5) = 71, T(6) = 83, T(7) = 97, T(8) = 113, T(9) = 131, T(10) = 151$. Da li se može zaključiti da je $T(n)$ prost broj za svako $n \in N$? Izvršili smo nekoliko (čak (10)) provjera i dobili da je u svakom od tih slučajeva $T(n)$ prost broj. Mogli smo provjeriti još nekoliko njih. Dobili bismo da su i $T(11), T(12), \ldots, T(39)$ prosti brojevi. Medjutim, ni to nije dovoljno da bismo izveli zaključak prema kojem je $T(n)$ prost broj za svako n. Zaista, imamo da broj $T(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40+1) + 41 = 41 \cdot 41$ nije prost. Dakle, u izvodjenju opštih zaključaka direktnom provjerom nekoliko konkretnih situacija, treba biti oprezan!

Zadatak 4. Na koliko djelova dijele prostor n ravni koje prolaze kroz jednu tačku? Ako taj broj ozničimo sa $D(n)$, tada imamo da je $D(1) = 2, D(2) = 4, D(3) = 8$ Na osnovu ovh primjera može se učiniti da je $D(n) = 2^n$. Ali, u dokazu opet nešto nedostaje. Dopuniti.

Primjer 5. Sljedeći zadatak bi se mogao klasifikovati kao zadatak kombinatorne geometrije. Njega vežu za ime poznatog geometra J. Štajnera[1] iz prve polovine 19 vijeka. Zadatak se ponekad formulše kao zadatak o rezanju pice, ali ćemo ga mi formulisati kao zadatak o dijeljenju ravni pravim linijama. Zadatak glasi:

Koliki je maksimalni broj c_n djelova na koje n pravih dijele ravan?

Možemo početi sa jednom pravom i zaključiti da ja $c_1 = 2$, zatim sa dvije prave i zaključiti da je $c_2 = 4$, i dalje sa tri prave zaključiti da je $c_3 = 7$. Primjetimo da $n-$ta prava dijeli samo neke oblasti na dva dijela, odnosno da se broj oblasti uvećava za k ako nova prava siječe k starih oblasti, odnosno kada siječe $k-1$ ranije povučenih pravih, a nova n-ta prava siječe (najvše) $n-1$ ranije povučenih pravih, kad nije paralelna ni sa jednom od njih. Slijedi da je $c_n = c_{n-1} + n$ odnosno

$$\begin{array}{ccccc} c_2 & = & c_1 & + & 2 \\ c_3 & = & c_2 & + & 3 \\ \ldots. & \ldots & \ldots.. & \ldots & \ldots. \\ c_n & = & c_{n-1} & + & n. \end{array}$$

[1] Jacob Steiner, 1796.-1863., švacarski matematičar

Odavde, sabranjem dobjamo da je

$$c_n = c_1 + (2 + \cdots + (n-1) + n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Primjer 6. Nekoliko pravih u fiksiranoj ravni dijele tu ravan na djelove. Dokazati da je moguće obojati te djelove u dvije boje (crvenu i plavu) tako da susjedni djelovi (to su oni koji imaju zajedničku granicu koja se sastoji od više od jedne tačke) budu obojeni različitim bojama? Primijetimo da inače nije moguće svaki kartu (ravan podijeljenu linijama, ne obavezno pravim) obojiti sa dvije boje, tako da susjedni djelovi budu obojeni različitim bojama. Naprimjer, ako postoji tromedja (iz koje na karti polaze tri linije) svaki dio ravni je susjedni za druga dva, imamo situaciju da nije moguće ta tri dijela obojiti sa dvije boje tako da susjedni djelovi budu obojeni različitim bojama.

Označimo tvrdjenje "Ako je ravan podijeljena sa n pravih linija, tada je moguće djelove obojiti u dvije boje tako da susjedni djelovi budu obojeni različitim bojama"(takvo bojanje zvaćemo pravilnim) sa $T(n)$. Naše pitanje glasi: Da li je $T(n)$ tačno za svako n? Ako imamo samo jednu pravu, ona će podjeliti ravan na dvije poluravni i možemo jednu obojiti jednom (plavom) bojom a drugu drugom (crvenom) bojom. Dvije prave koje se sijeku dijele ravan na četri dijela i njih je jednostavno pravilno obojiti sa dvije boje. Ako dodamo joše jednu pravu, (crtati sliku), ona će podijeliti tri dijela, pri čemu će novi susjedni djelovi biti obojeni istom bojom. Tada promijenimo boje novih djelova koji se nalaze sa jedne strane te prave, a djelove sa druge strane nove prave ostavimo nepromijenjene. Tako dobijamo da su susjedni djelovi obojeni različitim bojama. Sada je jasno da možemo dodati još jednu pravu, zatim još jednu i tako dalje i bojati nove djelove na opisani način i tako dobiti kartu pravilno obojenu. Da li na osnovu izloženih argumenata možemo zaključiti da kartu odredjenu sa n pravih možemo obojita sa dvije boje tako da susjedni djelovi budu obojeni različitim bojama? Mi smo se uvjerili (i) da je tačno tvrdjenje $T(1)$: jedna prava dijeli ravan na djelove koje možemo obojiti pravilno sa dvije boje i (ii) da $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$: ako se ravan koja je podijeljena na djelove pomoću n pravih može pravilno obojiti sa dvije boje, tada se i ravan podijeljena sa $(n+1)$ pravih može pravilno obojiti sa dvije boje. Dakle, prema principu indukcije, dokazali smo da je tvrdjenje $T(n)$ tačno za svaki prirodan broj n,

Primjer 7. Broj 111 je djeljiv sa 3, broj 111111111 je djeljiv sa $9 = 3^2$, broj $111\ldots111$ (27 puta ponovljena cifra 1) djeljiv je sa $27 = 3^3$. Da li je broj $111\ldots111$ (3^n puta ponovljena cifra 1) djeljiv sa 3^n.?

Da li je tačno da je 111 djeljivo sa 3? To se može provjeriti pomoću dobro poznatog kriterijuma djeljivosti sa 3. Zbir cifara tog broja jednak je 3, pa je broj djeljiv sa 3. Slično zbir cifara broja zapisanpg sa 9 puta ponovljenom cifrom 1, jednak je 9, pa je dakle taj broj djlejiv sa 9. Ali za djeljivost sa 27 ne postoji kriterijum djeljivosti takvog tipa, jer je recimo zbir cifara broja 1899 jednak 27 a taj broj pri dijeljenju sa 27 daje ostatak 9. Dakle, treba mijenjati pristup. Uočimo da je

$$111111111 : 111 = 1001001, \text{ odnosno } 111111111 = 111 \cdot 1001001.$$

Pri tome su i 111 i 1001001 djeljivi sa 3, pa je njihov proizvod djeljiv sa 9. Dalje, broj koji se sastoji od 27 puta ponovljene cifre 1 jednak je proizvodu broja od 9 jedinica i broja koji se sastoji od 3 jedinice i nekoliko 0 (dvije grupe po 8 nula)

$$111111111111111111111111111 : 111111111 = 1000000001000000001.$$

Broj sa 9 jedinica je prema već dokazanom djeljiv sa 9, a broj sa 3 jedinici i 2 puta po 8 nula, je djeljiv sa 3. Dakle, njihov proizvod (to je broj sa 27 jedinica) je djeljiv sa 27. Ako sa a_n oznimo broj koji se piše sa 3^n puta ponovljnom cifrom 1, tada direktnim dijeljenjem dobijamo da je količnik $a_{n+1} : a_n = b_n$, gdje je je b_n broj koji se počinje cifrom 1 zatim slijedi $3^n - 1$ nula, pa cifra 1, pa opet $3^n - 1$ nula i na kraju cifra 1. Dakle, broj b_n je djlejiv sa 3. Iz jednakosti $a_{n+1} = a_n \cdot b_n$ slijedi da ako pretpostavimo da je broj a_n djeljiv sa 3^n tada je broj a_{n+1} djeljiv sa 3^{n+1}. Kakoje broj a_1 djlejiv sa 111, prema principu indukcije slijedi da je za svako prirodan broj n broj a_n djeljiv sa 3^n.

Postoje i druge (ekvivalentne) formulacije principa matematičke indukcije. Recimo, ako je tvrdjenje $T(n)$ tačno za $n = 1$ i ako za svako $n \in N$, iz pretpostavke da su tačna tvrdjenja $T(1), T(2), \ldots, T(n)$ slijedi da je tačno tvrdjenje $T(n+1)$, tada je tvrdjenje $T(n)$ tačno za svaki prirodan broj n.

U svakoj od ovih formulacija principa indukcije uslov: "tačno je tvrdjenje $T(1)$"može se zamijeniti uslovom "za neko $k \in Z$ tačno je tvrdjenje $T(k)$"ali se tada može izvesti zaključak da je tvrdjenje $T(n)$ tačno za svaki cijeli broj $n \geq k$.

Zadatak 1. Dokazati da svaku sumu, počev od 5 eura, moguće platiti monetama od 2 i 5 eura.

Zadatak 2. Neki od učesnika skupa su se medjusobno rukovali. Dokazati da broj onih učesnika skupa koji su imali neparan broj rukovanja paran.

Primjer 7. Dokazaćemo da je

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} \text{ za svako } n \geq 2$$

Prvo imamo da je $S_2 = \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2!}$. Pretpostavimo da je za neko n, $S_n = 1 - \frac{1}{n!}$. Tada je

$$S_{n+1} = S_n + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{n+1-n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Odavde, prema principu matematičke indukcije, slijedi da je za svako $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, $S_n = 1 - \frac{1}{n!}$.

Zadatak 3. Dokazati da je

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Primjer 7. Dokazaćemo da je

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

Za $n = 1$ formula je očigledno tačna. Pretpostavimo da je formula tačna za neko n, tj. da je

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$$

Tada je

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Prema principu indukcije, formula je tačna za svako $n \in N$.

Primjer 8. Dokazaćemo da ako je $n \geq 2$ i $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$, tada je $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) > 1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$: Za $n = 2$ imamo nejednakost $(1-x_1)(1-x_2) = 1-(x_1+x_2)+x_1x_2 > 1-(x_1+x_2)$, pa je dakle nejednakast tačna za $n = 2$. Pretpostavimo sada da je za neki prirodan broj n za brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ tačna nejednakost $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) > 1-(x_1+x_2+\cdots x_n)$ i posmatrajmo brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in (0,1)$. Tada je

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)(1-x_{n+1}) > (1-x_{n+1})(1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)) =$$

$$1-x_{n+1}-(x_1+x_2+\cdots+x_n)+x_{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n) > 1-(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}).$$

Dakle, iz pretpostavke da je nejednakost tačna za neko $n \in N$ slijedi da je ona tačna i za $n+1$, pa je prema principu indukcije nejednakost tačna za svako $n \geq 2$.

Primjer 9. Dokazaćemo da za $n \geq 2$ i $|x| < 1$ važi nejednakost

$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n$$

Za $n = 2$ treba dokazati da je $4 > (1-x)^2 + (1+x)^2 = 2 + 2x^2$, odnosno da je $x^2 < 1$ što je tačno za $|x| < 1$. Pretpostavimo da je $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$. Tada je

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} < (1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} + (1-x)(1+x)^n + (1+x)(1-x)^n =$$

$$(((1-x)^n + (1+x)^n)((1-x)+(1+x)) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Prema principu matematičke indukcije, slijedi da je nejednakost tačna za svaki prirodan broj $n \geq 2$.

Primjer 10. Dokazaćemo Bernulijevu nejednakost: ako je $h > 0$ tada za svaki prirodan broj $n \geq 2$ važi: $(1+h)^n > 1+nh$. Prvo, za $n = 2$ nejednakost je tačna, jer je $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$. Pretpostavimo da je $(1+h)^n > 1+nh$. Tada je $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) > (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2 > 1+(n+1) = h$. Prema principu matematiǩe indukcije, slijedi da za svako prirodan broj $n \geq 2$važi: $(1+h)^n > 1+nh$. Uključujići i slučaja $n = 1$ imamo nejednakost $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Primjer 11. Dokazaćemo da za svaki prirodan broj n i svako $h \in (0, 1/n]$ važi: $(1+h)^n < 1+nh+n^2h^2$. Za $n = 1$ nejednakost koju treba dokazati glasi: za $h \in (0,1]$, $1+h < 1+h+h^2$, što je očigledno tačno. Pretpostavimo da za svako $n \in N$ i svako

$h \in (0, 1/n]$ važi $(1+h)^n < 1 + nh + n^2h^2$. Neka je sada $h \in (0, 1/(n+1)]$. Tada je $h \in (0, 1/n)$ pa je

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) < (1+nh+n^2h^2)(1+h) = 1+(n+1)h+(n^2+n+n^2h)h^2.$$

Primijetimo da zbog $h \in (0, 1/(n+1)]$ imamo da je $n^2+n+n^2h \leq (n+1)^2$. Sada imamo da je $(1+h)^{n+1} < 1+(n+1)h+(n+1)h^2$. Ukupno, imamo da za svako $n \in N$ i svako $h \in (0, 1/n]$ važi $(1+h)^n < 1+nh+n^2h^2$.

Primjer 12. Dokažimo da je za svaki prirodan broj $n \neq 3$ važi: $3^n > n^3$. Prvo, za $n = 4$ nejednkost postaje $3^4 > 4^3$, odnosno $81 > 64$ što je očigledno tačno. Slično, direktno se provjerava da je nejednakost tačna i za $n = 5$: $243 > 125$. Pretpostavimo da je sada $3^n > n^3$ za neko $n \geq 5$. Tada je $3^{n+1} > 3n^3$, pa da bi se koristi princip matematičke indukcije) treba dokazati da je za $n \geq 4$, $3n^3 > (n+1)^3$, odnosno $2n^3 > 3n^2+3n+1$. što se takodje može dokazivati koristeći princip matematičke indukcije, a može i direktno uočavajući da je za $n > 4$, svaki od sabiraka $1, 3n, 3n^2$ manji od $\frac{2}{3}n^3$.

Primjer 13. Dokazaćemo da za $n \geq 2$ važi nejednakost

$$\frac{2 - \overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}^{n \text{ puta}}}{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ puta}}} > \frac{1}{4}$$

Označimo $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ puta}}$. Treba dokazati da je

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

Prvo indukcijom se jednostavno dokazuje da je $a_n < 2$ za svaki prirodan broj n.. Zaista, za $n = 2$ je $a_2 = \sqrt{2} < 2$. Ako pretpostavimo da je za neko n, $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ puta}} <$ 2, tada je $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ puta}} = \sqrt{a_n+2} < \sqrt{2+2} = 2$. Dakle, za svako $n \in N$ je $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ puta}} < 2$. Zbog toga je nejednakost

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

koju treba dokazati ekvivalentna sa $8 - 4\sqrt{2+a} > 2 - a$ odnosno sa $6 + a > 4\sqrt{2+a}$ i na kraju sa $36 + 12a + a^2 > 32 - 16a \iff (a-2)^2 \geq 0$, što je očigledno tačno.

Primjer 14. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti neparni prirodni brojevi, takvi da su njihove razlike različite. Dokazati da suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nije manja od $\frac{n(n^2+2)}{3}$.

Rješenje. Prvo primijetimo da je za $n = 1$ tvrdjenje tačno jer imamo jedan nepran broj a_1 i treba da dokažemo da je tada suma $a_{\geq} \frac{1\cdot(1^2+2)}{3} = 1$, što je očigledno tačno. Mogli bismo probati i sa $n = 2$. Tada imamo dva različita neparna prirodna broja a_1 i a_2. Najmanju sumu $a_1 + a_2$ imaćemo ako su to brojevi 1 i 3, i tada je ta suma jednaka $4 \geq \frac{2(2^2+2)}{3} = 4$. Dakle i za $n = 2$ tvrdjenje je tačno. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n brojeva koji zadovoljavaju uslove zadatka i neka su $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ prirodni brojeva koji zadovoljavaju uslove zadatka. Prema induktivnoj pretpostavci je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n(n^2+2)}{3}$. Posmatrajmo pozitivne razlike $a_i - a_j, i > j$. Sve su to parni brojevii njih ima $\frac{n(n+1)}{2}$, pa je najveća od njih (to je razlika $a_{n+1} - a_1) \geq n(n+1)$. Slijedi da je $a_{n+1} \geq n(n+1) + a_1 \geq n^2 + n + 1$. Slijedi da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq \frac{n(n^2+2)}{3} + n^2 + n + 1 = \frac{(n+1)((n+1)^2+2)}{3}$. Dakle, prema principu matematičke indukcije, nejednakost je tačna za svako $n \in N$.

Primjer 15. Dokazati da je proizvoljni razlomak m/n, gdje je $0 < m/n < 1$ moguće napisati u obliku

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_r},$$

gdje je $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_r$, pri čemu je q_2 djeljivo sa q_1, q_3 djeljivo sa q_2, $\cdots$ q_r djeljivo sa q_{r-1}

Rješenje. Pretpostavljano da je m/n neskrativ razlomak. Tvrdjenje ćemo dokazati indukcijom po m. Za $m = 1$ tvrdjenje je očigledno tačno. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za neko $m \in N$. Napišimo $n = m(d_0 - 1) + l$, gdje je $l < m$, dakle, $l = m - k$. Sada imamo da je $n = md_0 - k$, gdje je $d_0 > 1$ i $0 < k < m$. Tada je $\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0}(1 + \frac{k}{n})$. Prema induktivnoj pretpostavci je $\frac{k}{n} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 d_2} + \cdots + \frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_r}$, pa je

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 d_1} + \frac{1}{d_0 d_1 d_2} + \cdots + \frac{1}{d_0 d_1 d_2 \cdots d_r}$$

što znači da je tvrdjenje tačno i za $m+1$, odnosno ono je tačno za svaki prirodan broj m.

Primjer 16. Dokazaćemo poznatu nejednakost izmedju aritmetičke i geoemetrijske sredine. Naime pretpostavimo da su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi i posmatrajmo sredine: aritmetičku sredinu ovih brojeva $AM(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ i geometrijsku sredinu $GM(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Dokazaćemo da je tada $GM(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq AM(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Poznato je mnogo različitih dokaza ove nejednakosti. Izložićemo dva dokaza. Primijetimo da za $n = 2$ nejednakost ima geometrijsku interpretaciju. Naime, (crtati sliku) ako je AC duž dužine $a_1 + a_2$, i ako su tačke B i D izmedju tačaka A i C, takve da je D središte duži AC a dužina duži AB jednaka a_1, dužina duži BC jednaka a_2, i ako je k polukružnica nad prečnikom AC, i E i F redom presjeci polukružnice k i normala na AC iz tačaka D i B, tada je dužina duži D jednaka $\frac{a_1+a_2}{2}$, dok je dužina duži BF jednaka $\sqrt{a_1 a_2}$. Pošto je u krugu svaka tetiva manja od prečnika, slijedi da je $\sqrt{a_1 a_2} = BE <\leq DF =\leq \frac{a_1+a_2}{2}$.

Prvi dokaz. Prvo, pretpostavimo da su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni brojevi, takvi da je njihov proizvod $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Dokazaćemo, koristeći princip matematičke indukcije da je tada $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. Ako su svi $x_i = 1$, tada je nejednakost očiglebno tačna, jer je tada $x_1 + x_2 + \cdot + x_n = 1$. Za $n = 1$ tvrdjenje je takodje očigledno tačno. Za $n = 2$, ako je $x_1 \geq 1$ tada je i $x_2 \leq 1$. Tada je $(1 - x_1)(1 - x_2) \leq 0$, odakle slijedi da je $1 + x_1 x_2 \leq x_1 + x_2$, odnosno zbog $x_1 x_2 = 1$, imamo da je $x_1 + x_2 \geq 2$. Pretpostavmo da je za neki prirodan broj n iz $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ (svi $x_i > 0$) slijedi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > n$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ pozitivni brojevi takvi da je $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1$. Tada medju njima postoje dva (neka su to brojevi x_1 i x_2) tako da je jedan od njih $ge1$ a drugi ≤ 1, pa je proizvod $(1 - x_1)(1 - x_2) \leq 0$, odakle slijedi da je $x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2) - 1$. Sada imamo da je $(x_1 x_2) x_3 \cdots x_n x_{n+1} = 1$, pa je prema induktivnoj pretpostavci $(x_1 x_2) + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n$. Odavde s obzirom na $x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2) - 1$ slijedi $(x_1 + x_2 - 1 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n$, odakle dalje slijedi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$. Prema principu matematičke indukcije slijedi da za svako $n \in N$ i proizvoljne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čiji je proizvod jednak 1, važi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$.

Sada posmatrajmo proizvoljne pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i postavimo $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$. Tada je proizvod $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, pa je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. Postavljajući $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$ dobijamo da je $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{sqrt[n] a_1 a_2 \cdots a_n} \geq n$, odakle slijedi $AM(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq GM(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Drugi dokaz. Dokazaćemo da je nejednakost tačna za brojeve n oblika $n = 2^k$ a zatim ćemo dokazati da ako je nejednakost tačna za neko $n \in N$ tada je tačna i za broj $n - 1 \in N$. Dakle, za $n = 2$, primijetimo da je $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$. Odavde slijedi da je $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0$, odnosno $AM(a_1, a_2) \geq GM(a_1, a_2)$. Pretpostavimo da nejednakost važi za neko $n = 2^m$, tj. da za takve n važi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{m+1}}$ označimo $\frac{a_k + a_{2^m + k}}{2} = b_k, k = 1, 2, \ldots, 2^m$. Za svako takvo k je j $b_k \geq \sqrt{a_k a_{k+2^m}}$. Tada važi:

$$GM(a_1, a_2, \ldots, a_{2^m}, a_{2^m+1}, \ldots a_{2^{m+1}}) = \sqrt[2^{m+1}]{(a_1 a_{2^m+1})(a_2 a_{2^m+2}) \cdots (a_{2^m} a_{2^{m+1}}} \leq$$

$$\left((b_1)^2 (b_2)^2 \cdots (b_{2^m})^2\right)^{1/2^{m+1}} = (b_1 b_2 \cdots b_{2^m})^{1/2^m} =$$

$$GM(b_1, b_2, \ldots, b_{2^m}) \leq AM(b_1, b_2, \ldots, b_{2^m}) = AM(a_1, a_2, \ldots, a_{2^{m+1}}).$$

Time smo dokazali da je nejednakost tačna za svakih 2^m pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m}, m \in N$. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za bilo kojih n pozitivnih brojeva, gdje je n neki prirodan broj. Posmatrajmo brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{1/(n-1)}$. Njih ima n, pa pošto je, prema induktivnoj pretpostavci nejednakost tačna za n pozitivnih brojeva, važi:

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{1/(n-1)} = \left(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{1/(n-1)}\right)^{1/n} \leq$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{1/(n-1)}}{n}.$$

Odavde dobijamo nejednakost

$$(a_1a_2\cdots a_{n-1})^{1/(n-1)}(1-\frac{1}{n}) \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n},$$

odakle dalje slijedi nejednakost

$$GM(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) \leq AM(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}).$$

Iz dokazanog slijedi da je nejednakost $GM(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq AM(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ za bilo kojih n pozitivnih brojeva $a_1, a_, \ldots, a_n$. Ako sa

$$HM(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

označimo harmonijsku sredinu pozitivnih brojeva $a_1,a_2,\ldots,a_n$ tada imamo

$$\frac{1}{HM(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = AM(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}) \geq GM(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{GM(a_1,a_2,\ldots,a_n)},$$

pa dakle važi:

$$HM(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq GM(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq AM(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

Zadatak. Utvrditi kada u nejednakosti $GM(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) \leq AM(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$, važi jednakost?

Primjer 17. Dokazaćemo da važe nejednakosti:

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Označimo sa T skup svih prirodnijh brojeva za koje su gornje nejednakosti tačne. Primijetimo da za $n=1$ nejednakosti koje treba dokazati glase $2(\sqrt{2}-1) < 1 < 2\sqrt{1}$ koje su očigledno tačne. Dakle $1 \in T$. Uvedimo oznake $L(n) = 2(\sqrt{n}-1), M(n) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}, D(n) = 2\sqrt{n}$. Imamo dakle da je $L(1) < M(1) < D(1)$. Pretpostavimo da je za neko $n \in N$, $L(n) < M(n) < D(n)$. Tada je

$$M(n+1) = M(n) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > L(n) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$2(\sqrt{n+2}-1) - 2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$2(\sqrt{n+2}-1) - 2\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$2(\sqrt{n+2}-1) - 2\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} >$$

$$2(\sqrt{n+2}-1)-2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+2}-1)=L(n+1).$$

Dalje je

$$M(n+1)=M(n)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<D(n)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$2\sqrt{n+1}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=2\sqrt{n+1}-2\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$2\sqrt{n+1}-2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}=D(n+1).$$

Dakle, pretpostavili smo da je $L(n)<M(n)<D(n)$ i dokazali da je tada $L(n+1)<M(n+1)<D(n+1)$. Takodje, dokazali smo da je $L(1)<M(1)<D(1)$. Prema principu matematičke indukcije, slijedi da je za svako $n\in N$, $L(n)<M(n)<D(n)$.

Primjer 18. Dokazaćemo da za svaki prirodan broj $n\geq 2$ važi nejednakost:

$$(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdots(1-\frac{1}{\sqrt{n}})<\frac{2}{n^2}.$$

Prvo, za $n=2$ nejednakost glasi $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})<\frac{2}{4}$ koja je ekvivalentna sa $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ koja je očigledno tačna. Pretpostavimo da je za neki prirodan broj n tačna nejednakost

$$(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdots(1-\frac{1}{\sqrt{n}})<\frac{2}{n^2}.$$

Odavde slijedi da za $n\geq 2$ važi:

$$(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdots(1-\frac{1}{\sqrt{n}})(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}})<\frac{2}{n^2}(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=$$

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{n^2\sqrt{n+1}}\leq\frac{2}{(n+1)^2}.$$

Prema principu matematičke indukcije, slijedi da je nejednakost tačna za svako $n\geq 2$.

Primjer 19. Dokazaćemo da za svaki prirodan broj n važi:

$$\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n-1}x=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}$$

Prvo, neka je $L(n)=\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n-1}x$, $D(n)=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}$. Primijetimo da je $L(1)=\cos x, D(1)=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$, Kako je $\sin 2x=2\sin x\cos x$, imamo da je $L(1)=D(1)$. Pretpostavimo da je za neko n, $L(n)=D(n)$. Tada, koristeći ovu pretpostavku, imamo:

$$L(n+1)=L(n)\cos 2^n x=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}\cos 2^n x=\frac{2\sin 2^n x\cos 2^n x}{2^{n+1}\sin x}=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}=D(n+1).$$

Dakle, jednakost je tačna za svako $n\in N$.

Primjer 20. Dokazaćemo da je za svaki prirodan broj n:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Označimo $L(n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ i $D(n)=\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Trbe dokazati da je za svako $n\in N$ $L(n)\leq D(n)$.

Prvo uočimo da je $L(1)=\frac{1}{2}, D(1)=\frac{1}{\sqrt{4}}$, pa je dakle $L(1)=D(1)$, odnosno nejednakost je tačna za $n=1$. Pretpostavimo da je za neko $n\in N$, $L(n)\leq D(n)$. Tada je

$$L(n+1)=L(n)\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leq D(n)\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2}$$

Dovoljno je provjeriti da je $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$, tj. da je $\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}}\leq\frac{2n+2}{2n+1}$. Ova nejednakost je ekvivalentna sa $\frac{3n+4}{3n+1}\leq\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}$, što je dalje ekvivalentno sa $(3n+4)(2n+1)^2\leq(3n+1)(2n+2)^2$ koja se jednostavno provjerava množenjem. Prema principu matematičke indukcije, slijedi da je nejednakost tačna za svaki prirodan broj n.

Primjer 21. Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $f(n)=7^{2n}-48n-1$ djeljiv sa 2304.

Rješenje Primijetimo da je broj $f(1)=0$ djeljiv sa 2304 te da je $f(2)=2304$ takodje djeljiv sa 2304. Pretpostavimo da je za neko $n\in N$ broj $f(n)$ djeljiv sa 2304. Tada je

$$f(n+1)=7^{2(n+1)}-48(n+1)-1=7^2\cdot7^{2n}-48n-49=$$

$$7^2\cdot7^{2n}-48n\cdot49-48n+48n\cdot49-49=49(7^{2n}-48n-1)+48n\cdot48=49f(n)+2304n.$$

Odavde slijedi da je tada i $f(n+1)$ dhjeljiv sa 2304. Dakle, $f(n)$ je djeljiv sa 2304 za svaki prirodan broj n.

Primjer 22. Dokazati da je za svaki prirodan broj n $z_n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ prirodan broj.

Rješenje. Prije nego što primijenimo indukciju, primjetimo slječe: ako označimo $a=1+\sqrt{5}, b=1-\sqrt{5}$, tada je

$$z_n=\frac{a^n-b^n}{2^n\sqrt{5}}, z_{n+1}=\frac{(a+b)(a^n-b^n)-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{2^{n+1}\sqrt{5}}=$$

$$\frac{2(a^n-b^n)+4(a^{n-1}-b^{n-1})}{2^{n+1}\sqrt{5}}=z_n+z_{n-1}.$$

Pri tome je $z_0=0, z_1=1$. Ako pretpostavmo da su za neko n z_{n-1} i z_n prirodni brojevi, tada iz relacije $z_{n+1}=z_{n-1}+z_n$ slijedi da je z_{n+1} prirodan broj. Prema principu matematičke indukcije, slijedi da je za svako $n\in N$, z_n prirodan broj.

Primjer 23. Neka je (F_n) niz Fibonačijevih brojeva: $F_0=0, F_1=1, F_{n+1}=F_{n-1}+F_n$. Dokazati da važe sljedeće jednakosti:

$$F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n,\ \sum_{i=0}^{n}F_i^2=F_nF_{n+1}.$$

Rješenje. Neka je $L(n) = F_{n-1}F_{n+1}, D_n = F_n^2 + (-1)^n, S(n) = \sum_{i=0}^n F_i^2, Z(n) = F_nF_{n+1}$. Prvo primijetimo da je za $n = 1$, $L(1) = F_0F_2 = 0, D(1) = F_1^2 + (-1) = 0, S(1) = F_0^2 + F_1^2 = 1, Z(1) = F_0F_1 + F_1F_2 = 1$. Pretpostavimo da su jednakosti tačne za neko $n \in N$. tj. da je $L(n) = D(n), S(n) = Z(n)$. Tada je

$$L(n+1) = F_nF_{n+2} = F_n(F_n + F_{n+1}) = F_n^2 + F_nF_{n+1} = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n + F_nF_{n+1} =$$

$$F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) - (-1)^n = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = D(n+1).$$

Slično je

$$S(n+1) = S(n)+F_{n+1}^2 = Z(n)+F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1}+F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n+F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2} = Z(n+1).$$

Dakle sve jednakosti su tačne i za $n + 1$, pa, prema principu mtematičke indukcije, jednakosti su tačne za svaki prirodan broj n.

Primjer 24. Dokazati da je

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n.$$

Rješenje. Označimo $L(n) = 2! \cdot 4! \cdots (2n)!$, $D(n) = ((n+1)!)^n$. Za $n = 1$ imamo $L(1) = 2! = 2, D(2) = (2!)^1 = 2$, pa je $L(1) = D(1)$. Pretpostavimo da je za neko n $L(n) \geq D(n)$. Tada je

$$L(n+1) = L(n)\cdot(2n+2)! \geq ((n+1)!)^n\cdot(2n+2)! = ((n+1)!)^n\cdot(2n+2)(2n+1)\cdot(n+3)(n+2)! \geq$$

$$((n+1)!)^n \cdot (2n+2)(2n+1) \cdot (n+3)(n+2)! \geq ((n+2)^n(n+2)! = ((n+2)!^{n+1} = D(n+1).$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi da je njednakost $L(n) \geq D(n)$ tačna za svaki prirodan broj n.

Primjer 25. Dokazati da je

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ puta}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

za svaki prirodan broj n

Rješenje. Neka je

$$L(n) = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ puta}}, D(n) = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Prvo za $n = 1$ imamo $L(1) = \sqrt{2}, D(1) = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = L(1)$. Pretpostavimo da je jednakost tačna za neko n. Tada koristeći jednakost $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$ i induktivnu pretpostavku, imamo

$$L(n+1) = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(n+1) \text{ puta}} = \sqrt{2+L(n)} = \sqrt{2+D(n)} =$$

$$\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=2\cos\frac{2}{2^{n+1}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

Dakle, jednakost je tačna za svako $n \in N$.

Primjer 26. Definišimo niz polinima $(P_n(x))$ na sljedeći način

$$P_0(x)=1, P_1(x)=1, P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x).$$

Dokazati da je $P_n(2\cos\theta)=\frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}$.

Rješenje. Za $n=0$ imamo: $\frac{\sin{(0+1)\theta}}{\sin\theta}=P_0(2\cos\theta)$ i $\frac{\sin{(1+1)\theta}}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta=P_1((2\cos\theta)$, što znači da je jednakost tačna za $n=0$ i $n=1$. (Napomenimo da smo u ovom slučaju morali provjeriti jednakosti za $n=0$ i $n=1$, jer kada kasnije budemo dokazivali da je formula tačna za $n+1$, trebaće nam da koristimo pretpostavku da je ona tačna za n i za $n-1$) Pretpostavimo dakle, da su za neki prirodan broj n tačne jednakosti:

$$P_{n-1}(2\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \text{ i } P_n(2\cos\theta)=\frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}.$$

Tada je

$$P_{n+1}(2\cos\theta)=2\cos thetaP_n(2\cos theta)-P_{n-1}(2\cos theta)=2\cos\theta\frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}-\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=$$

$$\frac{2\cos\theta\sin{(n+1)\theta}-\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos\theta\sin{(n+1)\theta}-\sin{((n+1)\theta-\theta)}}{\sin\theta}=$$

$$\frac{\cos\theta\sin{(n+1)\theta}+\cos{(n+1)\theta}\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{sin(n+2)\theta}{\sin\theta}.$$

Odave, prema principu matematičke indukcije, slijedi d aje jednakost tačna za svaki prirodan broj n.

Primjer 27. Dokazati da je $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{theta}{2}}$.

Primjer 28. Mala Fermaova teorema (Piere Fermat, 1601 - 1665, francuski matematičar), u kojoj se tvrdi da za svaki prirodan broj n i svaki prost broj p važi:

$$n^p \equiv n \bmod p$$

može se dokazati matematičkom indukcijom i jednog jednostavnog svojstva djeljivosti binomnih koeficijenata.

Naime, ako je p prost broj i k pozitivan cio broj manji od p, tada je broj $\binom{p}{k}$ djeljiv sa p. U protivnom, imali bismo da se cio broj ($k-$elementnih podskupova skupa $\{1,2,\ldots,p\}$) može napisati u obliku:

$$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}=p\frac{A}{k!},$$

pri čemu $\frac{A}{k!}$ nije cio broj. To nije moguće, jer broj $p\geq k$ nema zajedničkih faktora sa $k!$.

Neka je dalje $L(n) = n^p - n$. Tada je broj $L(1) = 0$ djeljiv sa p. Pretpostavimo sada da je za neki prirodan broj n, broj $L(n) = n^p - n$ djeljiv sa p. Tada na osnovu binomne formule imamo

$$L(n+1) = (n+1)^p - (n+1) = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} + 1 - (n+1) = (n^p - n) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}.$$

Sabirak $n^p - n$ je djlejiv sa p prema induktivnoj pretpostavci, a prema primjedbi o koeficijinetima $\binom{p}{k}$ i $sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}$ je djeljiva sa p. Slijedi da je $L(n+1)$ djeljiv sa p, pa prema principu matematičke indukcije, slijedi da je broj $L(n)$ djeljiv sa p za svaki prirodan broj n.

Poznato je mnogo različitih dokaza male Fermaove teoreme. Izložićemo još jedan od njih.

Kombintorni dokaz male Fermaove teoreme koji ćemo izložiti, zasnovan je na specijalnoj interpretaciji teoreme. Ako se ogrlica sastoji od p bisera obojenih u n boja, tada bojenja bisera možmo predstaviti preslikavanjima $f : \{1, 2, \ldots, p\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ (svakom biseru pridružujemo jednu boju). Slijedi da je broj različitih ogrlica (prije nego što se njeni krajevi spoje) jednak broju takvih preslikavanja, tj. taj broj je jednak n^p.

Sa g označimo rotaciju ogrlice za ugao $\frac{1}{p}360^0$, (tj. promjena položaja svakog bisera na ogrlici za jedno mjesto) u smjeru kretanja kazaljke na satu. Tada se sve moguće rotacije mogu opisati iteracijama preslikavanja g. Očigledno, za svaku ogrlicu x važi: $g^{(p)}(x) = x$. Na skupu svih ogrlica definišimo relaciju "$\sim_g$"na sljedeći način: ogrlica x je u relaciji $\sim_g$ sa ogrlicom y, ako se ogrlica y može dobiti rotacijom ogrlice x. To je očigledno relacija ekvivalencije i može se reći da $x \sim_g y$ označava da su x i y iste ogrlice, jer se one kada se stave oko vrata, ne razlikuju u smislu da se okretanjem jedne dobija druga. Skup svih mogućih ogrlica ekvivalentnih sa ogrlicom x jednak je $\{x, g(x), g^2(x), \ldots, g^{p-1}(x)\}$. Očigledno, $(x \sim_g y) \iff (\{x, g(x), g^2(x), \ldots, g^{p-1}(x)\} = \{y, g(y), g^2(y), \ldots, g^{p-1}(y)\})$. Jednobojnih ogrlica ima n, koliko i boja. U terminima preslikavanja g one se opisuju kao ogrlice za koje je $g(x) = x$. Ako ogrlica x nije jednobojna tada su sve ogrlice iz skupa $\{x, g(x), g^2(x), \ldots, g^{p-1}(x)\}$ različite, tj. u ovom skupu ih ima tačno p. Zaista, u protivnom bismo imali da je za neke i i j, $1 \leq i < j \leq p-1$, $g^i(x) = g^j(x)$. Primjenjujući $p-i$ puta preslikavanje (rotaciju) g, dobijamo: $g^p(x) = x = g^k(x)$, gdje je $1 < k = p-i+j < p$. Slijedi da je tada $g^{p-1}(x) = g^{k-1}(x)$ i skup $\{x, g(x), g^2(x), \ldots g^{p-1}(x)\}$ se sastoji od nekoliko cjelina oblika $x, g(x), g^2(x), \ldots, g^{k-1}(x)$. To bi značilo da je p djeljivo sa k, što nije moguće s obzirom da je p prost broj. Dokazali smo da se skup ogrlica koje nisu jednobojne, kojih ima $n^p - n$, sastoji od izvesnog broja skupova oblika $\{x, g(x), g^2(x), \ldots g^{p-1}(x)\}$ sa po p elemenata. Slijedi da je broj $n^p - n$ djeljiv sa p.

Izloženi dokaz je zapravo terminološki adaptiran dokaz sljedećeg stava.

Ako je S konačan skup p prost broj i $g : S \mapsto S$ preslikavanje takvo da je za savko $x \in S$, $g^{(p)}(x) = x$, tada za skup $F = \{x \in S : f(x) = x\}$ fiksnih tačaka preslikavanja f važi: $card(S) - card(F)) \equiv 0 \pmod{}p$.

Prilično neočekivamo, teorijski rezultat, kakav je mala Fermaova teorema, ima mnoge primjene, recimo u kriptografiji.

Kao jednu ilustraciju primjene male Fermaove teoreme, izložićemo rješenje zadatka sa Juniorske Balkanske matematičke olimpijade održane 2007. godine, koji je glasio:

Dokazati da ako je p prost broj, tada broj $m(p) = 3^p + 7p - 4$ nije potpuna kvadrat.

Dokaz ćemo početi direktnom provjerom za male vrijednosti broja p. Za $p = 2$ i $p = 3$, dobijamo $m(2) = 19$ i $m(3) = 44$, a ovi brojevi nisu potpuni kvadrati. Primijetmo da ako je p prost broj, onda je on ili oblika $p = 4k+1$ ili oblika $p = 4k+3$. Ako je $p = 4k+1 > 3$, tada 3^p i $7p$ pri dijeljenju sa 4 daju ostatke jednake 3, a $m(p) = m(4k+1) = 2 \pmod 4$. Dakle, $m(p)$ je paran broj koji nije djeljiv sa 4, pa nije potpun kvadrat. Ako je $p = 4k+3$, tada je $m(p) = 3 + 0 - 4 \pmod{p} = (-1) \pmod{p}$). Ako bi za neko p ovog oblika i za neko $l \in N$ važila jednakost $m(p) = l^2 = (-1)(\pmod{p}$, tada bismo imali da je $l^p = l^{4k} \cdot l^2 \cdot l = -l(\pmod{p}$), a, prema maloj Fermaovoj teoremi, bismo imali da je $l^p = l(\pmod{p}$). Slijedi da bi tada broj l bio djeljiv sa p, pa bi i l^2 bio djeljiv sa p, a imamo da je $l^2 = (-1)(\pmod{p}$. Kontradikcija. Dakle, $m(p)$ nije potpun kvadrat.

Primjer 29. Sljedeći primjer je primjer Hanojskih kula koji se pojavljuje u programiranju, kao jedan od primjera na kome se ilustruje pojam rekurzije. Sam primjer je smislio francuski matematčar E. Luka[2], 1883. godine. On se kalsifikuje prije kao primjer rješavanja zadataka pravljenjem rekurentne relacije.

Kula se sastoji od 8 različitih diskova oblika kružnog prstena, nanizanih na jednom od tri stuba u redosoljedu smanjivanja, gledajuć odozdo nagore. Zadatak se sastoji u tome da se kula premjesti na jedan od preostala dva stuba, tako što se svaki put premješta samo jedan disk, i nikad se ne stavlja veći disk na manji. Pri tome se naravno mogu koristiti sva tri stuba. Naslućuje se da je to moguće, ali je pitanje koji je minimalni broj premještanja i kako se taj minimalni broj realizuje. Sam Luka je vezao zadatak za neku legendu i u toj legendi se govorlo o 64 diska.

Pretpostavimo da imamo ne 8 već n diskova. Označimo minimalni broj premještanja diskova sa a_n. Dakle, a_1 je broj premještanja za slučaj kada imamo 1 disk. Očigledno, tada je potrebno samo jedno premještanje, pa je $a_1 = 1$. Sa dva diska, sve je još uvijek dovoljno jednostavno. Prvo premjestimo disk sa vrha na treći (pomoćni) stub, a zatim disk sa dna na drugi stub, i na kraju, sa trećeg stuba, premjestmo disk na drugi stub. Prebrojimo i zaključimo da je $a_2 = 3$. Još jedna proba sa tri diska. Prvo premjestimo sa osnovnog stuba na drugi dva gornja diska, koristeći treći stub. Za to su potreba tri premještanja. Dalje, najveći disk prebacimo na treći stub (jos jedno premještanje), a zatim dva diska sa drugog stuba prebacujemo na treći, koristeći prvi, u tri premještanja. Ukupno, to je $a_3 = 3 + 1 + 3 = 7$ premještanja.

U opštem slučaju, sa osnovnog diska premještamo $n - 1$ disk na drugi stub (koristeći naravno treći), a za to nam je potrebno a_{n-1} premješetanja. Prvo, u jednom trenutku, moramo premjestiti najveći disk, a to je moguće jedino da ga premjestimo na u tom trenutku prazan stub. To znači da kada na neki stub premještamo najveći disk, on mora u tom trenutku biti jedini na tom stubu, a to dalje znači da je prethodno trebalo premjestiti $n - 1$ manjih diskova na jedan od stubova, i to kao kulu, jer drugačje ne možemo da ih postavimo na jedan stub, a za to je potrebno bar a_{n-1} premještanja. Kada smo realizovali prethodnu situaciju, premještamo najveći disk na slobodni stub,

[2]François Édouard Anatole Lucas, 1842.-1891. francuski matematčar

i to je još jedno premještanje. Kada smo već postavili najveć disk, treba ostalih $n-1$ premjestiti na najveći disk, a za to je neoophodno napraviti a_{n-1} premještanja. Slijedi da je $a_n = 2a_{n-1} + 1, a_1 = 1$. Eksplicitna formula za a_n može se sada izvesti na razne načine. Recimo, ako uvedemo oznaku $b_n = a_n + 1$, tada je $a_n = b_n - 1$, pa prethodnu relaciju možemo pisati u obliku $b_n - 1 = 2(b_{n-1} - 1) + 1 = 2b_{n-1} - 1$, odnosno $b_n = 2b_{n-1}$, odakle slijedi $b_n = 2^n$ i $a_n = 2^n - 1$. Dakle, $a_3 = 7, a_4 = 15$ itd. Ujedno smo izlo zili i algoritam "izgradnje"nove kule. Za $n = 8$ potrebno je napraviti (najmanje) $a_8 = 2^8 - 1 = 255$ premještanja, a za $n = 64$ taj broj je $a_{64} = 2^{64} - 1$. Otuda legenda prema kojoj je zadatak premještanja u početku izgledao kao jednostavan, ali se ispostavilo da je broj premještanja tako veliki da se realno ne može realizovati.

Primjer 31. Na cjelobrojnoj mreži u koordintnoj ravni (koju čine tačke sa cjelobrojnim koordinatama) nacrtan je poligon sa tjemenima u čvorovima mreže. Dokazati da je površina S poligona jednaka $I + \frac{B}{2} - 1$, gdje je I broj čvorova mreže koji leže unutar poligona a B br0j čvorov amreže koji leže na granici poligona.

Rješenje. Primijetimo da bilo koji poligon, čak i konkavni, može biti podijeljen na dva manja spajajući dva tjemena dijagonalom koja je u potpunosti unutar poligona. Produžvajući ovaj postupak, dati poligon možemo podijeliti na trouglove. Poligon sa 4 stranice se može podijeliti na 2 trougla, poligona sa 5 stranica na 3 trougla, poligon sa n stranica na $(n-2)$ trougla. Treba dokazati naše tvrdjenje važi za $n = 3$ i još da ako je tvrdjenje tačno za sve poligone sa $k \leq n$ stranica tada je tačno i za poligon sa $(n+1)$ stranica. Prvo ćemo dokazati drugi dio tvrdjenja. Posmatrajmo $n+1$-strani poligon P i nekom dijagonalom ga podijelimo na dva manja poligona P_1 i P_2. Ova dva poligona imaju jednu zajedničku stranicu. Označimo sa I_1, I_2, B_1, B_2 broj čvorova mreže unutar i na granicama poligona P_1 i P_2. Sa m označimo broj čvorova na zajedničkoj stranici poligona P_1 i P_2. Tada, na osnovu induktivne pretpostavke, za površine $S(P), S(P_1)$ i $S(P_2)$ važi:

$$S(P) = S(P_1) + S(P_2) = (I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1)$$

Dalje, uočimo da su od m tačaka na zajedničkoj stranici poligona P_1 i P_2 (njih $(m-2)$) su unutar poligona P. Zbog toga je $I = I_1 + I_2 + (m-2)$, $B = B_1 + B_2 - 2(m-2) - 2$. Odavde slijedi:

$$I + B/2 - 1 = (I_1 + I_2 + m - 2) + (B_1 + B_2(m-2) - 2)/2 - 1 =$$

$$(I - 1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) = S(P_1) + S(P_2) = S(P).$$

Ostalo je da se dokaže da je formula tačna za trouglove. Prvo posmatramo proizvoljni pravougaonik Π čije su stranice paralelne koordinatnim osama, čije su stranice dužine n i m. Tada je broj tačaka mreže koje leže na granici pravougaonika jednak $B(\Pi) = 2n + 2m$, dok je broj unutrašnjih tačaka jednak $I(\Pi) = (n-1)(m-1)$. Primijetimo da je tada

$$S(P) = mn = (m-1)(n-1) + m + n + 1 = I + B/2 - 1,$$

čime je formula dokazana za pravougaonike. Ako je sada RT pravougli trougao sa katetama paralelenim koordinatbnim osama, čije su dužine m i n, a hipotenuza $\sqrt{m^2 + n^2}$. Njegova površina je $S(RT) = mn/2$. Ako je k broj tačak mreže koje leže na hipotenuzi (unutrašnje tačke hipotenuze), tada je broj tačaka mreže koje leže unutra trougla RT jednak $I(RT) = ((m-1)(n-1)-k)/2$, dok je broja tačaka na granici trougla jednak $B(RT) = m+n+k+1$. Tada je

$$I(RT)+B(RT)/2-1 = ((m-1)(n-1)-k)/2+(m+n+k+1)/2-1 = mn/2 = S(RT).$$

Proizvoljni trougao T možemo okružiti pravougaonikom sa stranicam paralelnim koordinatnim osama, i površina $S(T)$ može biti napisana kao razlika površine pravougaonika i najviše četiri pravougla trougla (nacrtati sliku). Na način sličan prethodnm, dokazuje se da je

$$S(T) = I + B/2 - 1.$$

Time je, prema principu matematičke indukcije, dokaz formule završen.

Primjer 32. Dato je n parova zarada (n lijevih i n desnih). Sa C_n označimo broj načina na koje možemo zagrade napisati matematički korektno. Na primjer, ako imamo 3 para zagrad, tada ih možemo zapsiati na sljedećih načine: $((())), (())(), ()(()), (()()), ()()()$. Dokazati da je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. ($C_n$ su Katalanovi brojevi i oni imaju i druge interesnatne interpretacije.)

Rješenje. Prvo uočimo da je $C_1 = 1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1}$, pa je dakla formula tačna za $n = 1$. Dokažimo da za Katalonove brojeve važi jednakost:

$$C_{n+1} = C_nC_0 + C_{n-1}C_1 + \cdots + C_0C_n.$$

Pretpostavimo da imamo $(n+1)$ parova zagrada i uočimo prvi par zagrada idući slijeva udesno. Taj par može obuhavtiti od k, $0 \leq k \leq n$ parova zagrada. Desno od tog para zagrada preostaje još $n-k$ parova. Pri tome k uparenih zagrada može biti orgnaizovano na C_k načina, i svaki od njih možemo kombinovati sa C_{n-k} načina organizovanja preostalih parova zagrada. To je moguće uraditi za svako $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ pa je

$$C_{n+1} = C_nC_0 + C_{n-1}C_1 + \cdots + C_0C_n.$$

Neka je sada $f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots$. Tada je

$$(f(x))^2 = C_0C_0+(C_0C_1+C_1C_0)x+(C_2C_0+C_1C_1+C_0C_2)x^2+\cdots = C_1+C_2x+C_3x^3+\cdots.$$

Odavde slijedi da je

$$C_0 + x(f(x))^2 = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots = f(x).$$

Pošto je $C(0) = 1$, slijedi da $f(x)$ zadovoljava kvadratnu jednačinu $x(f(x))^2-f(x)+1 = 0$, odakle slijedi da je

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x}.$$

Razlaganjem funkcije $\sqrt{1-4x^2}$ imamo

$$\sqrt{1-4x^2} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}4x + \binom{\frac{1}{2}}{2}(4x)^2 - \binom{\frac{1}{2}}{3}(4x)^3 + \cdots,$$

gdje je $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}$, Odavde slijedi da je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k+1}(-4)^{k+1}x^k}{2} = C_0 + C_1 x + C - 2x^2 + \cdots,$$

odakle sijedi da je koeficijentC_n uz x^n jednak

$$C_n = \binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}4^{n+1}}{2(n+1)!} = \frac{(2n-1)!!4^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Primjer 33. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji $n-$tocifreni broj djeljiv sa 5^n, @v cije su sve cifre neparne,

Rjeěnje. Probamo za male n. Za $n = 1$ treba dokazati d apostoji jednocifren broj sa neparnom cifrom, koji je djlejiv sa 5. To je očigledno broj 5. Za $n = 2$, treb adokazati da postoji dvocifren broj, čije su obje cifre neparne, koji je djljiv sa $5^2 = 25$. Jednostavno se uočava da postoji samo jedan takav broj-to je broj 75. Za $n = 3$, imamo d aje broj 375 djeljiv sa $5^3 = 125$. Primijetimo d a smo prosto dopisali cifru 3 ispred broja 75. Probamo da četvoricfreni broj (označimo ga sa b) koji je djeljiv sa $5^4 = 625$ dobijemo dopisivanjem neparne cifre (označimo je sa c) ispred pronadjenog trocifrenog broja 375. Tada je $b = c\cdot 10^3 + 375 = 10^3 + 3\cdot 5^3 = 5^3(c\cdot 2^3 + 3)$. Treba naći (dokazati da neparan broj (cifra) c, takva da je $c\cdot 2^3 + 3$ djeljivo sa 5, što s obzirom na $c\cdot 2^3 + 3 = c\cdot 5 + c\cdot 3 + 3$ bude djeljivo sa 5, što na kraju daje da treba obezbijediti da $(c+1)3$ bude djeljivo sa 5, što daje $c = 9$, odnosno traženi broj je 9375. Pretpostavimo sada da je tvrdjenje tačno za neko n. To znači da pretpostavljamo da postoji broj $n-$tocfreni broj $a = c_{n-1}10^{n-1} + c_{n-2}10^{n-2} + \cdots + c_1\cdot 10 + c_0$ koji je djeljiv sa 5^n i čije su sve cifre $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ neparne. Neka je $a = 5^n\cdot k$. Kako je a neparan broj, slijedi da je i k neparan broj. Pokušajmo formirati novi $(n+1)$cifreni broj b sa neparnim ciframa koji će biti djlejiv sa 5^{n+1}. Neka je to broj dobijen tako što je broju a dopisana cifra c_n, dakle, neka je $b = c_n\cdot 10^n + c_{n-1}10^{n-1} + c_{n-2}10^{n-2} + \cdots + c_1\cdot 10 + c_0 = c_n 10^n + 5^n\cdot k = 5^n(2^n c_n + k)$. Dovoljno je analizirati da li se može odrediti neparna broj (cifra) c_n takva da je $2^n c_n + k$ djeljiv sa 5. Dovoljno je gledati ostatke pri dijeljenju sa 5. Zbog toga je dovoljno razmotriti slučajeve $k = 0, k = 1, k = 2, k = 3$ i $k = 4$. Pri tome 2^n moě pri dijeljenju sa 5 dati ostatak 1 ili 2 ili 3 ili 4. Ako je, naprimjer, $k = 1$, tada treba dokazati da za svako n postoji neparan broj (cifra) c_n, takva da je $2^n c_n + 1$ djeljivo sa 5. Ako je naprimjer ostatak pri dijelejnju 2^n sa 5 bio jednak 4, tada je dovoljno postaviti $c_n = 1$, ako je ostatak bio 3 tada treba postaviti $c_n = 3$, ako je ostatak bio 2 tada treba postaviti $c_n = 7$, ako je ostatak bio 1, tada treba postaviti $c_n = 9$. Slično se analiziraju ostale moguće situacije, kada je $k = 0, k = 2, k = 3, k = 4$.

Primjer 34.(IMO Shortlist) Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $c > 0$ realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{x_1}{c^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{c^2 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{c^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} < \frac{\sqrt{n}}{c}.$$

Rješenje. Prvo, za $n = 1$ nejednakost glasi $\frac{x_1}{\sqrt{c^2+x_1^2}} < \frac{1}{c}$, što se jednostavno provjerava. Dalje pretpostavimo da je nejednakost tačna za proizvoljnih n realnih brojeva, gdje je n neki prirodan broj. Tada imamo

$$L = \frac{x_1}{c^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{c^2 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{c^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} + \frac{x_{n+1}}{c^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2} <$$

$$\frac{x_1}{c^2 + x_1^2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{c^2 + x_1^2}} = \frac{1}{c}\left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + x_1^2}} \frac{x_1}{\sqrt{c^2 + x_1^2}} + \sqrt{n}\frac{c}{\sqrt{c^2 + x_1^2}}\right) \leq$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2)\frac{1}{c} \leq \frac{1}{c}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \frac{1}{c}\sqrt{n+1}$$

gdje je $a_1 = 1, b_1 = \frac{x_1}{\sqrt{c^2+x_1^2}}, a_1 = \sqrt{n}, b_2 = \frac{c}{\sqrt{c^2+x_1^2}}$. pa je $a_1^2 + a_2^2 = n + 1, b_1^2 + b_2^2 = 1$. Odavde slijedi da je

$$L < \frac{\sqrt{n+1}}{c}.$$

Dokazali smo dakle, koristeći princip matematičke indukcije, da je nejednakost tačna za svaki prirodan broj n.

Napomena. U dokazu smo koristili nejednakost oblika $a_1b_1+a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, koja je ekvivalentna sa $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$, što je dalje ekvivalentno sa $2a_1b_1a_2b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$, odnosno sa $(a_1b_2 + a_2b_1)^2 \geq 0$, koja je očigeldno tačna.

Inače, ovo je specijalan slučaj poznate nejednakosti Koši-Bunjakovskog-Švarca, koja glasi:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Koja se dokazuje na sljedeći način. Prepostavićemo da nisu svi a_i jednaki nuli. U protivnom, nejednakost je očigledno tačna. Za realne vrijednosti λ posmatramo zbir kvadrata

$$f(\lambda) = (b_1 + \lambda a_1)^2 + (b_2 + \lambda a_2)^2 + \cdots + (b_n + \lambda a_n)^2 =$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\lambda^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\lambda + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Očigeldno, kvadratni trinom $f(\lambda)$ je nenegativan za sve vriejdnosti λ. No to znači d aje njegova diskriminanta negativna:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0,$$

a odavde slijedi nejednakost Koši-Bunjakovskog-Švarca.