Kvadratni trinom

Milojica Jaćimović

Prirodonomatematički fakultet
81000 Podgorica, ul. Džordža Vašingtona bb, Crna Gora
Odsjek za matematiku, Univerzitet Crne Gore
milojica@jacimovic.me

Počećemo jednostavnim primjerom:

Primjer 0. Od svih pravouganika (datog) obima $2l$ ($l > 0$) odrediti onaj koji ima najveće površinu. I pored toga v sto se nekome može učiniti da zadatak ima praktične razloge, jasno je da je pitnje koje u zadatku postavljamo nije obavezno motivisano praktičnim razlozima, već je vezano za traženje idealnih oblika. Dakle, zbir dvaju susjednih stranica pravougaonika je l, pa ako je jedna od njih dužine x, dužina druge je $l - x$ a površina pravouganika jednaka je $S = f(x) = x(l - x)$. Maksimalnu vrijednost ove funkcije odredićemo pošto je prethodno napišemo u drugom obliku, izdvajajući potpuni kvadrat. Imamo:

$$f(x) = -(x^2 - lx) = -(x - \frac{l}{2})^2 + \frac{l^2}{4}.$$

Odavde slidei da će funkcija $f(x)$ najveću vrijednost dotići za $x = \frac{l}{2}$ i ta maksimalna vrijednost iznosi $\frac{l^2}{4}$. Dakle, jedna stranica pravougaonika je $x = \frac{l}{2}$ a susjedna $l - x = \frac{l}{2}$. Drugim riječima, rješenje našeg zadatka je kvadrat.

Dokazali smo, dakle, da za svako x važi nejednakost $x(l - x) \leq \frac{l^2}{4}$.

Specijalno za, $l = 1$ imamo nejednakost $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$, za svako x.

Primjer 1. Dokazati da je za svako $x > 0$,$x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Rješenje. Imamo da je $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$.

Primjer 2. Slično, formiranjem potpung kvadrata, dobijamo da za $\varepsilon > 0$ i proizvoljne x i y, važi

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 = (\sqrt{\varepsilon}x - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y)^2 + 2xy$$

odakle slijedi nejednakost:

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geq 2xy \tag{1}$$

a zatim iz

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 = (\sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y)^2 - 2xy(\sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y)^2 - (\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2)$$

slijedi nejednakost

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y)^2. \tag{2}$$

Specijalno, za $\varepsilon = 1$ i $\varepsilon = 4$ je

$$x^2 + y^2 \geq 2xy,\ x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2},$$

i

$$4x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 2xy,\ 4x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq \frac{1}{2}(2x + \frac{1}{2}y)^2.$$

Dalje, koristeći prethodne nejednakosti, dobijamo, da za prozvoljne x i y i $\alpha \in [0,1]$ važi:

$$(\alpha x + (1-\alpha y)^2 = \alpha^2 x^2 + (1-\alpha)^2 y^2 + 2xy\alpha(1-\alpha) \leq$$
$$\alpha^2 x^2 + (1-\alpha)^2 y^2 + \alpha(1-\alpha)(x^2+y^2) = \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2. \tag{3}$$

Za utvrdjivanje svojstava kvadratnog trinoma $ax^2 + bx + c$, korisno je znati grafik odgovarajuće funkcije $y = ax^2 + bx + c$.

Počećemo grafikom najjednostavnije kvadratne funkcije $y = x^2$. Prvo, uočavamo da je $y \geq 0$ za svako x, pri čemu je $y = 0$ ako i samo ako je $x = 0$. To znači da grafik ove funkcije sa koordintnim osama ima tačno jednu zajedničku tačku - koordinatni početak, i da se nalazi iznad $x-$ose, u prvom i drugom kvadrantu. Dalje, u tački $x = 0$ funkcija dostiže svoju najmanju vrijednost, i ona je jednaka nuli. Zbog $(-x)^2 = x^2$ imamo da ako tačka (x, y) pripada grafiku, tada i njoj simetrična tačka u odnosu na $y-$osy $(-x, y)$ pripada istom grafiku. Za ovakve funkcije kažemo da su *parne*. Za preciznije crtanje grafika, korisno je ucrtate tačke grafika koje se mogu čitati iz tablice vrijednosti funkcije u nekoliko tačaka

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Ako su $A(x_1, y_1 = x_1^2)$ i $B(x_2, y_2 = x_2^2)$, $(x_1 < x_2)$ tačke sa grafika funkcije $f(x) = x^2$, tada je grafik funkcije $g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1, x \in [x_1, x_2]$ duž (tetiva grafika funkcije $f(x) = x^2$) AB. Ako je $x_s \in [x_1, x_2]$ tačka sa odsječka $[x_1, x_2]$, tada je $x_s = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ i na osnovu nejednakosti () za vrijednosti funkcija f i g u tački x_s važi:

$$g(x_s) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_s - x_1) + y_1 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - x_1) + x_1^2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}((1-\alpha)(x_2 - x_1) + x_1^2 =$$

$$\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 \geq (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 = f(x_s).$$

To znači da se tetiva AB grafika funkcije $y = f(x)$ nalazi iznad odgovarajućeg dijela grafika te funkcije. Za takve funkcije kažemo da su *konveksne*. Skup $\{(x, y) : y \geq f(x)\}$ naziva se nadgrafikom funkcije f. Dakle, konveksne funkcije su funkcije čiji je nadgrafik konveksan skup. Specijalno, funkcija $f(x) = x^2$ je konveksna. Ako je pak skup$\{(x, y) : y \leq f(x)\}$, koji se inače naziva subgrafikom funkicje $y = f(x)$, konveksan, tj., ako je

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)x_2$, za svako $\alpha \in [0,1]$ tada za funkciju f kažemo da je *konkavna*.

Grafik funkcije $y = ax^2$ za $a > 0$ se dobija iz grafika funkcije $y = x^2$ homotetijom: svaka ordinata grafika funkcije $y = x^2$ množi se sa a. To ukupno daje grafik koji je sličan grafiku funkcije $f(x) = x^2$, samo što je za $a > 1$ uži a za $a \in (0,1)$ širi od grafika funkcije $y = x^2$. (Slijede slike sa odgovarajućim graficima). Za $a < 0$ grafik funkcije $y = ax^2$ je simetričan sa grafikom funkcije $y = |a|x^2$ u odnosu na $x - osu$. Dakle za $a < 0$, funkcija $y = f(x)$ je konkavna. (Slijede grafici).

Krive linije koje su grafici funkcija $y = ax^2$ za $a \neq 0$ pojavljuju se i u nekim drugim problemima, i te krive se nazivaju *prabolama*.

Primijetimo da je na svakoj od ovih krivih tačka $T(0,0)$ karakteristična. To je tačka minimuma za $a > 0$ ili tačka maksimuma za $a < 0$ funkcije $f(x) = ax^2$. Kaže se da je to tjeme parabole $y = ax^2$. Za $y-$osu u odnosu na koju je grafik simetričan, kaěmo da je osa te parabole.

Crtanje (ili bar približno skiciranje) grafika kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, može se takodje zasnovati na izdvajanju potpunog kvdrata, tj. na sljedećoj transformaciji:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + \frac{c}{a} = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-D}{4a^2},]$$

gdje je $D = b^2 - 4ac$ *diskriminata* kvadratnog trinoma $ax^2 + bx + c$. Odavde slijedi da se grafik funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ može dobiti translacijom prabole $y = ax^2$, za vektor $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$. Svoju ekstremnu vrijednost (minimum ili maksimum zavisno od znaka broja a), funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, dostiže za $x_T = -\frac{b}{2a}$ i ta vrijednost iznosi $y_T = \frac{-D}{4a}$. Dakle, važe nejednakosti:

$$ax^2 + bx + c \geq \frac{-D}{4a} \text{ za a>0 } , ax^2 + bx + c \leq \frac{-D}{4a} \text{ za a<0 },$$

i grafik funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ je parabola, čije je tjeme $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$. Ta parabola siječe $y-$osu u tački $(0,c)$, a presjeke sa $x-$osom nalazimo rješavajući jednačinu $ax^2+bx+c = 0$, koja se poslije idzdvajanja potpunog kvadrat svodi na $a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-D}{4a^2}] = 0$. Odavde slijedi da broj rješenja ove jednačine zavisi od znaka diskriminante D. Ako je $D > 0$, posmatrana jednčina ima dva rješenja, odnosno grafik siječe $x-$osu u dvjema tačkama: $x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Za $D = 0$ dobijamo jedno rješenje $x_1 = x_2 = \frac{-D}{2a}$. Za $D < 0$ jednčina nema realnih rješenja (grafik nema zajedničkih tačak sa $x-$osom, ali jednačina ima rješenja u skupu kompleksnih brojeva i ta rješenja su $x_{1,2} = -\frac{b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$, koja se konjugovana, sa imaginarnim djelovima razlčitim od nule..

Primjetimo da je u svakom od ovih slučajeva važe *Vijetove formule* (koje se dobijaju sabiranjem i množenjem rješenja)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Provjerimo ovu jednkost za slučaj kada su rješenja kompleksni brojevi, tj. kada je $D < 0$. Naime, tada je $x_1 = \alpha - i\beta, x_2 = \alpha + i\beta$, gdje je $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$, pa je

$$x_1 + x_2 = 2\alpha = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{c}{a}.$$

Primijetimo da ako su x_1 i x_2 nule trinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tada je $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. To slijedi, recimo, iz Vijetovih formula, jer je $a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 - a\frac{b}{a} + a\frac{c}{a} = ax^2 + bx + c$.

Primjer 3. Neka su x_1 i x_2 nule funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, a $T(x_T, y_T)$ tjeme parabole-grafika funkcije $y = f(x)$. Odrediti znake koeficijenata a, b i c, u sljedećim situacijama: (i) $x_1 < 0 < x_2, xT < 0, y_T > 0$; (ii) $0 < x_T, 0 < y_T, x_1, x_2$-konjugovano komplelskni brojevi, sa imaginarnim dijelom različitom od 0; (iii) $x_1 < 0 = x_2, x_T < 0, y_T < 0$; (iv) $0 < x_1 = x_2 = x_T, y_T = 0 < f(0)$.

Rješenje. Korisno je skicirati grafike i zaključivati na osnovu njih. (i) Kako grafik funkcije siječe $x-$osu u dvjema tačkama, slijedi da je $D > 0$. Sada zbog $y_T = -\frac{D}{4a} > 0$ i zbog $D > 0$ imamo da je $a < 0$. Kako $x_T < 0$ imamo da je $\frac{-b}{2a} < 0$ što znači da su a i b istog znaka, odnosno imamo da je $b < 0$. Pošto je proizvod $\frac{c}{a} = x_1x_2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ (gdje je $x_1 = \alpha - i\beta, x_2 = \alpha + i\beta$,) rješenja odgovarajuće jednačine pozitivan, slijedi da su a i c istog znaka, pa je $c < 0$. Dakle, $a < 0, b < 0, c < 0$.

(ii) Kako su rješenja jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ kompleksno-konjugovana sa nenultim imaginarnim dijelom, slijedi da je diskriminatna $D < 0$. Kako je pri tome $y_T = -\frac{D}{4a} < 0$ slijedi da je $a < 0$. Dalje je $c = f(0) < y_T < 0$. Zbog $x_T = \frac{b}{2a} > 0$ i $a < 0$, imamo da je $b < 0$. Dakle, $a < 0, b < 0, c < 0$.

(iii) Iz $\frac{c}{a} = x_1x_2 = 0$, slijedi $c = 0$. Kako imamo dvije nule funkcije, slijedi da je $D > 0$, pa zbog $y_T = \frac{-D}{4a} < 0$, slijedi da je $a > 0$. Na kraju je $x_T = \frac{-b}{2a} < 0$, odakle slijedi $b > 0$. Dakle, $a > 0, b > 0, c = 0$.

(iv) Iz $f(0) > 0$ slijedi da je $c = f(0) > 0$. Dalje, je zbog $Y_T = 0$ $D = 4ac - b^2 = 0$, pa je $ac > 0$, tj. a i c su istog znaka, odnosno imamo da je i $a > 0$. Na kraju zbog $0 < x_T = \frac{-b}{2a}$ imamo da je $b < 0$. Znači $a > 0, b < 0, c > 0$.

Primjer 4. Naći sve vrijednosti r za koje su korijeni jednačine $(r-4)x^2-2(r-3)x+r = 0$ veći od -1.

Rješenje. Prvo, posebno razmotrimo slučaj $r = 4$. Tada jednačina ima rješenje $x = 2$, pa je $r = 4$ jedna od traženih vrijednosti. Ako je $r \neq 4$, tada jednačina ima realnih rješenja, što znači da je diskriminatna $D = (r-3)^2 - (r-4)r = r^2 - 6r + 9 - r^2 + 4r = 9 - 2r \geq 0$. Odavde slijedi $r \leq \frac{9}{2}$. Dalje, iz uslova slijedi da je $x_T = \frac{2(r-3}{2(r-4)} = \frac{r-3}{r-4} > -1$, tj. $\frac{2r-7}{r-4} > 0$, što daje uslov $r \in (-\infty, \frac{7}{2})$ Dalje, skicirajući moguće grafike funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ zaključujemo da tada mora biti $0 \leq (r-4)f(-1) = (r-4)[(r-4+2(r-3)+r)] = (4-r)(4r-10)$, što ukupno daje drugi uslov $r < 5/2$. Pošto svi ovi uslovi moraju biti ispunjeni, dobijamo da je rješenje zadatka $r \in (-\infty, 5/2) \cup [4, 9/2]$.

Primjer 5. (JBMO 2007, Šumen, Bugarska) Neka je a pozitivan realan broj takav da je $a^3 = 6(a+1)$. Dokazati de jednačina $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ nema realnih rješenja.

Rješenje. Uslov $a^3 = 6(a+1)$ napišimo u obliku $a(a^2-6) = 6$. Transformišimo kvadratni trinom izdavajanjem potpunog kvadrata

$$x^2+ax+a^2-6 = (x+\frac{a}{2}+a^2-6-\frac{a^2}{4} = (x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(a^2-8) = (x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(a^2-6-2) = (x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(\frac{6}{a}-2).$$

Primijetimo da iz uslova slijedi da je $a < 3$, jer je u protivnom (za $a \geq 3$) $a(a^2-6) \geq 3(9-6) > 6$, pa na osnovu prethodne transformaciju trinoma, imamo $f(x) = x^2+ax+a^2-6 = (x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(\frac{6}{a}-2) > \frac{3}{4}(\frac{6}{a}-2) > 0$, što znači da je trinom pozitivan za svako x, te da jednačina $f(x) = 0$ nema realnih rješenja.

Primjer 5. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativni brojevi, čiji je zbir jednak broju$a$.. Dokazati da je tada

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n \leq \frac{a^2}{4}$$

Rješenje. Uvedimo promjenljivu $x = a_1 + a_3 + \cdots +$ Tada je $a - x = a_2 + a_4 + \cdots$ pa je na osnovu Primjera 1 ($x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}$) :

$$\frac{a^2}{4} \geq (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots) \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n.$$

Primjer 6. Dokazati da za proizvoljne realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1.b_2, \ldots, b_n$ važi nejednakost *Koši-Bunjakovski-Švarc ova nejednakost*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Rješenje. Posmatramo trinom

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2,$$

koji je nenegativan za svako x. Uvedimo oznake

$A = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, $B = (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, $C = b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2, D = 4AC-B^2$ disktriminata

Tada je

$$f(x) = (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) = Ax^2+2Bx+C$$

Izdvajanjem potpunog kvadrata dobijamo

$$f(x) = A(x+\frac{B}{A})^2 + C - A\frac{B^2}{A^2} \geq 0, \text{ za svako } x$$

ovog trinoma ($y_T = C - A\frac{B^2}{A^2} = \frac{AC-B^2}{A} = \frac{-D}{4A}$-ordinata tjemena parabole nenegativna. Dakle, $B^2 \leq AC$, odnosno

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

.

Primjer 7. Dokazati da ako je $c(a+b+c)<0$ tada je $b^2>4ac$.

Rješenje. Posmatrajmo trinom $f(x)=x^2+bx+ac$. Uslov $(a+b+c)c<0$ može biti zapisan kratko u obliku $f(c)<0$. Izdvajanjem potpunog kvadrata trinom možemo zapisati u obliku $f(x)=(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4a}$, odakle slijedi da je i najmanja vrijednost ovog trinoma $y_T=c-\frac{b^2}{4a}<0$, odnosno $4ac<b^2$.

Primjer 8. (St. Peterburg, 1999)(za samostalan rad) Kvadratni trinom $f(x)=x^2+bx+c$, sa cjelobrojnim koeficijentima $|c|\le 800$, ima svojstvo da je $f(120)$ prost broj. Dokazati da tada jednačina $f(x)=0$ nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno da postoji cjelobrojno rješenje x_1 date jednačine. Ako sa x_2 označimo drugo rješenje, tada je njihov zbir $x_1+x_2=-b$ cio broj, pa je $x_2=-b-x_1$ cio broj. Sada imamo da je $f(x)=(x-x_1)(x-x_2), x_1, x_2\in Z$. Pri tome je proizvod $x_1x_2=c$ cio broj čija je apsolutna vrijednost ≤ 800. Pri tome je $f(120)=(120-x_1)(120-x_2)$ prost broj (označimo ga sa p), pa je jedan od brojeva $120-x_1$ i $120-x_2$ jednak ±1 a drugi je jednak $\pm p=\pm f(120)$. Neka je $|120-x_1|=1$ i $|120-x_2|=f(120)$. Tada imamo da je $x_1=119$ ili je $x_1=121$. S obzirom da je $x_1x_2=c, |c|\le 800$ i $119\cdot 7=833$, slijedi da je $|x_2|<7$, pa je $f(120)=|120-x_2|\in\{114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126$. Medjutim, nijedan od ovih brojeva nije prost ($119=17\cdot 7$, pa imamo kontradikciju, što znači da ne postoje cjelobrojna rješenja jednačine $f(x)=0$.

Zadatak 9. (za samostalan rad) Kvadratni trinom $f(x)=ax^2+bx+c$ za cjelobrojne vrijednosti prmjenljive x ima cjelobrojne vrijednosti koje su četvrti stepeni cijelih brojeva. Dokazati da je tada $a=0$ i $b=0$.

Rješenje. Pošto je $f(0)=c$ četvrti stepen cijelog broja, slijedi da je $c\ge 0$. Dalje je za sve cijele brojeve $x, f(x)\ge 0$ (jer je $f(x)$ četvrti stepen), slijedi da je $a\ge 0$. U protivnom ($a<0$) bismo imali da je i za dovoljno veliki cio broj $x: f(x)=ax^2(1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2})<0$, što je suprotno pretpostavci o četvrtim stepenima vrijednost $f(x)$. Pretpostavimo da je $a\neq 0$ ili $b\neq 0$. Posmatrajmo cjelobrojne vrijednosti $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. Njih ima n a bar $n/2$ različitih, jer kvadtana funkcija ponavlja vrijednost najviše dva puta. Sve te vrijednosti su izmedju 0 i $an^2+|b|n+c$. Medjutim broj cetvrtih stepena izmedju ova dva broja nije veći od $\sqrt[4]{an^2+|b|n+c}+1$ a za dovoljno veliko n, ovaj broj je manji od $n/2$ (u protivnom bismo imali da je $an^2+|b|n+c\ge(n/2-1)^4$, što za dovoljno veliko n ne mo ze biti tačno). Kontradikcija, dakle $a=0$ i $b=0$.

Primjer 10. Dokazati da postoji $x_0\in[-1,1]$ takva da je $|x_0^2+bx_0+c|\ge\frac{1}{2}$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, da je za svako $x\in[0,1]$ $|x^2+bx+c|<1/2$. Kvadratna funkcija $g(x)=x^2-1/2$ u tačkama 0 i ±1 ima vrijednosti $-1/2$ i $1/2$. Ako je $f(x)=x^2+bx+c$ tada je $f(\pm1)<g(\pm1)$ i $f(0)>g(0)$. Dakle, grafici funkcija f i g imaju bar dvije zajedničke tačke: jednu u $[-1,0]$ i i drugu u $[0,1]$. To medjutim ne može biti tačno, jer jednačina $f(x)=g(x)$ ima samo jedno rješenje. Dakle, postoji x_0 takvo da je $|f(x_0)|\ge 1/2$.

Primjer 11. Dokazati da ako je $|ax^2+bx+c|\le 1/2$ za svako $|x|\le 1$, tada je $|ax^2+bx+c|\le x^2-1/2$ za svako $|x|\ge 1$.

Rješenje. Dovoljno je dokazati da je $ax^2+bx+c \le x^2-1/2$. Neka je $f(x)=ax^2+bx+c$ i $g(x)=x^2-1/2$ Tada je $f(0)\ge g(0)=-1/2$ i $f(\pm1)\le g(\pm1)=1/2$. Zato grafici funkcija f i g imaju dvije zajedničke tačke na segmentu $[-1,1]$, a više od dvije zajedničke tačke ne mogu imati.

Ako je $f(\pm1)<g(\pm1)$ to će nejednakost $f(x)<g(x)$ važiti za $|x|\ge 1$. Potrebno je samo izučiti kada je $f(1)=g(1)$ ili $f(-1)=g(-1)$. Tada bi se moglo desiti naprimjer da je $f(1)=g(1)$ i $f(x)\ge g(x)$, za svako x blisko 1. No tada kvadratni trinom $f(x)-g(x)$ strogo pozotivan za $x\ne 1$ Specijalno $f(-1)>g(-1)$, što nije moguće.

Primjer 12. Dokazati da ako je $|ax^2+bx+c|\le 1$ za svako $|x|\le 1$, tada je $|cx^2+bx+a|\le 2$ za svako $|x|\le 1$.

Rješenje. Prema prethodnom zadatku imamo da je $|ay^2+by+c|\le 2y^2-1$ za svako $|y|\ge 1$. Postavimo $y=\frac{1}{x}$. Tada je

$$|cx^2+bx+a|=\frac{1}{y^2}|ay^2+by+c|\le\frac{1}{y^2}(2y^2-1)\le 2 \text{ za } |y|\ge 1, \text{ tj. za } 0<|x|\le 1.$$

Za $x=0$ nejednakost važi, jer važi za sve x bliske nuli.

Primjer 13. (a) Riješiti jednačinu $2x^2-4xy+3y^2+4x-10y+11=0$.

(b) Odrediti najmanju vrijednost funkcije $g(x,y)=2x^2-4xy+3y^2+4x-10y+13$ i vrijednosti x_T i y_T promjenljivih x i y za koje se ta vrijednost dostiže.

Rješenje. (a) Izdvajanjem potpunog kvadrata po promjenljivoj x dobijamo:

$$f(x,y)=2(x^2-2yx+2x)+3y^2-10y+11=$$

$$2(x-(y-1))^2-2(y-1)^2+3y^2-10y+11=2(x-(y-1))^2-2y^2+4y-2+3y^2-10y+11=$$

$$2(x-(y-1))^2+(y^2-6y+9)=2(x-(y-1))^2+(y-3)^2.$$

Odavde slijedi da su rješenja jednačne $f(x,y)=0$, $y=3$ i $x=y-1=2$.

(b) Na osnovu transformacije izraza za funkciju $f(x,y)$ iz tačke (a), imamo da je

$$g(x,y)=f(x,y)+2=2(x-(y-1))^2+(y-3)^2+2,$$

pa funkcija g najmanju vrijednost dostiže za $y_T=3$ i $x_T=y_T-1=2$ i ta vrijednost $g_T=2$. Dakle, važi nejednakost: $2x^2-4xy+3y^2+4x-10y\ge -11$ za proizvoljne realne brojeve x i y.

Zadatak 14. Short list IMO 2008, Madrid (za samostalni rad-kući) (a) Dokazati da za relane brojeve $x\ne 1, y\ne 1, z\ne 1$, koji zadovoljavaju uslov $xyz=1$, važi nejednakost:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(-1)^2}\ge 1$$

Rješenje. Uvedimo nove promjenljive

$$a=\frac{x}{x-1},\ b=\frac{y}{y-1},\ c=\frac{z}{z-1},$$

Tada nejednakost koju treba dokazati je $a^2+b^2+c^2 \geq 1$, uz uslov $(a-1)(b-1)(c-1) = abc$. Ovaj uslov je ekvivalentan sa

$$a + b + c - 1 = ab + bc + ca,$$

a s obzirom da je

$$(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca)$$

Kombinovanjem ove dvije jednakosti imamo

$$2(a + b + c - 1) = (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

a odavde

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2 = (a + b + c)^2 - 2(a + b + c)$$

a dodavanjem broja 1 na obje starne, dobijamo na desnoj strani potpun kvadrat, pa konačno imamo:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a + b + c - 1)^2$$

Napomena U predlogu za IMO, tražilo se da se dokaže da postoji beskonačno mnogo trojki racionalnih brojeva (x, y, z) za koje važi jednakost.

Zadatak 15. (Turnir gradova 2002/03, za samostalan rad-domaći). Vasilije se sprema da na tabli napiše kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c = 0$ sa koeficijntima iz skupa prirodnih brojeva. Poslije toga, Petar ako hoće može u jednačini promijeniti dva znaka sa "$+$"na "$-$". Ako su oba rješenja dobijene jednačine cijeli brojevi, tada pobjedjuje Vasilije, a ako jednačina nema rješenja ili bar jedno od njih nije cijeli broj, tada pobjedjuje Petar. Može li Vasilije izabrati koeficijente tako da sigurno pobijedi u ovoj igri.

Rješenje. Dovoljno je posmatrati situacije u kojima se mijenja znak najviše jednog koeficijenta. Jedno moguće rješenje je jednačina $x^2+5x+6 = 0$, jer i jednačine $x^2+5x-6 = 0$ i $x^2 - 5x + 6$ i $x^2 - 5x - 6 = 0$ imaju cjleobrojna rješenja.

Zadatak 16. (Turnir gradova 2006/07-za samostalan rad-domaći) Na tabli su napisan dva broj x i $y \geq x$. Petar zapisuje u svoju svesku x^2-kvadrat prvog (manjeg) od dva napisana broja, a zatim na tabli se pišu brojevi x i $y - x$ opet u rastućem poretku. Sa ovim brojevima se ponavlja postupak: Petar ponovo zapisuje kvadrat manjeg, a zatim se na tablu zapisuju novi brojevi. Postupak se ponavlja sve dok se na tabli ne pojavi broj 0. Kolika je u tom trenutku suma brojeva koje je u svesci zapisao Petar.

Rješenje. Da bi učenici pravilno shvatili zadatak, dobro je napisati primjer: Recimo, ako su na poečetku bioi zapisani brojevi 3 i 8, tada će redom na tabli stajati brojevi 3 i 5, zatim 2 i 3, zatim 1 i 2, pa 1 i 1 i na kraju 0 i 1, Petar u svesci piše i brojeve $3^2, 3^2, 2^2, 1^2, 1^2$ i računa zbir koji je jednak 24. Primjetimo da u opštem slučaju Petar prouzrokuje da se proizvod brojeva na tabli umanji za broj koji on piše u svesci: $x(y - x) = xy - x^2$ Pošto se na kraju pojavi proizvod nula, to znači da je od početni proizvod xy umanjen za zbir brojeva upisanih u svesku i postao jednak 0. Slijedi da je zbir broejva koje je Petar upisao u svesku jednak proizvodu xy, brojeva koji su u početku zapisani na tabli.

Zadatak, (Srbija, 2004.)(za samostalni rada-domaći) Razlika korijena jednačine $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in R)$ jednaka je 4. Naći te krijene tako dazbir $p + q$ bude najmnji mogu' ci.

Rješenje Prvo primijetimo da je prema Vijetovim formulama $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 x_2$. Uslov zadataka galsi $x_2 = 4 - x_1$. Odavde slijedi da je

$$p + q = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = x_1(x_1 - 4) - x_1 - (x_1 - 4) = x_1^2 - 6x_1 + 4.$$

Izdvajanjem potpunog kvadrata dobijamo

$$p + q = x_1^2 - 6x_1 + 4 = (x_1 - 3)^2 - 9 + 4 = (x_1 - 3)^2 - 5,$$

odavde slijedi da je $p+q$ minimalno akoje $x_1 = 3$, tada je $x_2 = x_1 - 4 = -1$, a minimalno vrijenost za $p+q$ iznosi $(p+q)_T = -5; (p = -2, q = -3$. Lako se provjerava da jednačina $x^2 - 2x - 3 = 0$ zadovoljava sve uslove zadatka.