КОМБИНАТОРИКА – од разбибриге до науке

Жана Ковијанић Вукићевић

Природно-математички факултет, Универзитет Црне Горе

е-адресе: zanak@rc.pmf.ac.me, zanak@t-com.me

Математика је наука произашла из проблема са којима су се људи кроз историју дуго суочавали. У другој половини 18. вијека (1764. год.) Џејмс Ват је изумио парну машину. Ручну производњу замијенила је индустријска. Појава машина континуалног дејства захтијевала је и развој одговарајућег математичког апарата, а то је била математичка анализа.

У другој половини 20. вијека компјутерска револуција је изњедрила дискретну математику. Прије појаве рачунара готово да није постојала потреба за систематским разматрањем метода и техника рјешавања проблема над произвољно великим али коначним, евентуално пребројивим, скуповима. Многи проблеми којима су се математичари (и не само они) до тада бавили ради забаве постали су важни проблеми примијењене математике. Дошло је до синтезе старих добро развијених математичких дисциплина, као што су математичка логика и алгебра, и нових или ,, наново рођених" теорија: комбинаторике, теорије графова, теорије информација и кодова, ...

Циљ овог предавања је да се упознамо са основним принципима и појмовима комбинаторике - математичке дисциплине која је дуго битисала на граници разбибриге и озбиљне науке и која (углавном) проучава коначне скупове и релације над њима и нерijетко компликоване математичке проблеме рјешава елементарним средствима, без примјене ,,софостициране" машинерије.

Пребројавање представља важан дио комбинаторике који се бави одређивањем броја објеката са извјесним својствима. Зато ће прво са чиме ћемо се упознати бити основни принципи пребројавања.

1. Основни принципи пребројавања

1.1. Принцип једнакости

коментар: По потреби, са ученицима поновити:

- шта је пресликавање
- за која пресликавања кажемо да су сурјективна или ,,на"
- шта су инјективна или ,,1-1" пресликавања
- шта је бијекција

Број елемената скупа X означавамо са $|X|$ или $card(X)$ и називамо кардиналним бројем скупа X .

Када желимо да кажемо да скуп X има n елемената, $n \in N$, често кажемо: Нека је $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ово заправо значи да постоји бијекција $f : \{1, 2, \dots n\} \to X$ тако да је $f(k) = x_k$, за свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

По договору, $|\varnothing| = 0$.

Овако долазимо до сљедећег принципа:

Дефиниција 1. (Принцип једнакости) Ако су A и B непразни скупови тада је $|A| = |B|$ ако између њих постоји бијекција.

примјер 1. Нека у S и T коначни скупови такви да је $|S| > |T|$. Пресликавање $f : S \to T$ није инјекција.

рјешење: Означимо $f(S)$ са А и претпоставимо да је f инјективно. Тада је, према принципу једнакости, $|S| = |A|$. Како је $A \subseteq T$, то је $|S| \leq |T|$.

■

примјер 2. Нека у S и T коначни скупови такви да је $|S| = |T|$. Пресликавање $f : S \to T$ је ,,1-1" акко је ,,на".

рјешење: Тврђење је типа еквиваленције, па ћемо појединачно доказати обје њене стране (т.ј. импликације):

$\Rightarrow$ Нека је $f: S \to T$ је ,,1-1". Tada je, $|S| = |f(S)|$. Kako je $|S| = |T|$, то је $|f(S)| = |T|$. Из $f(S) \subseteq T$ и $|f(S)| = |T|$ закључујемо да важи $f(S) = T$, јер је Т коначан скуп.

коментар: Ученицима обавезно нагласити да је претпоставка о коначности скупа Т била неопходан услов у горњем закључивању. Наиме, ако Т није коначан скуп тврђење $(X \subseteq T \wedge |X| = |T|) \Rightarrow X = T$ не важи. На примјер, $N \subseteq Z$ и $|N| = |Z|$, јер постоји бијекција из скупа природних у скуп цијелих бројева (ово нећемо показивати, вјерујте на ријеч!), али није $N = Z$.

$\Leftarrow$ Претпоставило сада да је f сурјекција али да f није инјекција. У овом случају постоје $a_1, b_1 \in S$ такви да је $a_1 \neq b_1$ и $f(a_1) = f(b_1)$. Neka je $g: S \setminus \{a_1\} \to T$ рестрикција (сужење) пресликавања f на скуп $S \setminus \{a_1\}$. Уколико је g ,,1-1", из принципа једнакости слиједи

$$|S \setminus \{a_1\}| = |T|,$$

то јесте $|S| - 1 = |T|$. Ово је у супротности са $|S| = |T|$.

Уколико g није ,,1-1", постоје $a_2, b_2 \in S \setminus \{a_1\}$ такви да је $a_2 \neq b_2$ и $f(a_2) = f(b_2)$ па посматрамо рестрикцију пресликавања f на скуп $S \setminus \{a_1, a_2\}$,... и т.д. поступак настављамо док не дођемо до неког скупа $S \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset S$ на коме је сужење пресликавања f инјективно. Тада је

$$|S \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}| = |T|,$$

то јесте $|S| - k = |T|$, $k > 1$, а ово је у супротности са $|S| = |T|$.

■

1.2. Принцип збира или суме

Овај једноставан принцип до сада сте много пута већ користили:

Теорема 1. (Принцип збира) *Ако су A и B дисјунктни коначни скупови, тада је* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

доказ: Нека су A и B дисјунктни коначни скупови са k и s елемената, редом. Тада је $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Како су A и B дисјунктни, њихову унију можемо записати у облику $A \cup B = \{c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_{k+s}\}$, гдје је $c_i = \begin{cases} a_i, & 1 \le i \le k \\ b_{i-k}, & k+1 \le i \le k+s \end{cases}$. Дакле, $|A \cup B| = k + s = |A| + |B|$.

■

примјер 3. Први разред једне школе чине 2 одјељења: I_a и I_b. Ако они, редом, броје 30 и 26 ученика на колико начина могу изабрати свог заједничког представника?

рјешење: Према принципу збира, $|I_a \cup I_b| = 30 + 26 = 56$, па је број могућности за избор педставника једнак 56.

■

Примјеном принципа математичке индукције, принцип збира се може проширити на произвољну коначну фамилију коначних узајамно дисјунктних скупова.

коментар: Са математичком индукцијом ученици се још нису срели па се мало ,,довијајте" како да им ово саопштите. Предлажем да кажете: ,,Релативно једноставним математичким апаратом који ћемо усвојити у неком од каснијих разреда, може се показати да важи ... ".

Теорема 2. *Ако су A_k, $1 \le k \le n$ коначни узајамно дисјунктни скупови, то јесте* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *за свако $i \ne j$, тада је* $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

примјер 4. Први разред једне школе чине 4 одјељења: I_a, I_b, I_c и I_d. Ако они, редом, броје 30, 32, 28 и 26 ученика на колико начина могу изабрати свог заједничког представника?

рјешење: Према принципу збира, $|I_a \cup I_b \cup I_c \cup I_d| = 30+32+28+26=116$, па је број могућности за избор педставника једнак 116.

■

1.3. Принцип производа

Послужимо се сљедећим примјером као илистрацијом Декартовог производа.

Ако је $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, x_2, \ldots, y_7\}$, елементе скупа $X \times Y$ можемо смјестити у табелу димензије 3×7 на сљедећи начин:

$$\begin{matrix} (x_1,y_1) & (x_1,y_2) & (x_1,y_3) & (x_1,y_4) & (x_1,y_5) & (x_1,y_6) & (x_1,y_7) \\ (x_2,y_1) & (x_2,y_2) & (x_2,y_3) & (x_2,y_4) & (x_2,y_5) & (x_2,y_6) & (x_2,y_7) \\ (x_3,y_1) & (x_3,y_2) & (x_3,y_3) & (x_3,y_4) & (x_3,y_5) & (x_3,y_6) & (x_3,y_7) \end{matrix}$$

Ако је $S \subseteq X \times Y$, за свако $1 \le k \le 3$, означимо са $l_{x_k}(S)$ елементе скупа S који се налазе у $k-$тој врсти табеле. Скуп S је дисјункнта унија скупова $l_x(S),\ x \in X$.

Слично, за свако $1 \le k \le 7$, означимо са $r_{y_k}(S)$ елементе скупа S који се налазе у $k-$тој колони ове табеле. Скуп S је дисјункнта унија скупова $r_y(S),\ y \in Y$.

Покушајмо сада да одговоримо на сљедеће питање:

Први разред једне школе чине 2 одјељења: I_a и I_b. Ако они, редом, броје 30 и 26 ученика на колико начина могу изабрати двочлану делегацију коју чини по један представник из сваког од ових одјељења?

Одговор на горње питање добијамо директном примјеном сљедећег принципа:

Теорема 3. *Нека су X и Y коначни скупови, и нека је $S \subseteq X \times Y$. Тада важе сљедеће једнакости:*

(1) $|S| = \sum_{x \in X} l_x(S) = \sum_{y \in Y} r_y(S)$, ***(принцип узастопног пребројавања)***

гдје

- за свако фиксирано $x \in X$, $l_x(S)$ је скуп свих уређених парова $(x,v) \in S$, када v ,,прође" кроз Y , односно $l_x(S) = \{(x,v) \in S \mid v \in Y\}$

и

- за свако фиксирано $y \in Y$, $r_y(S)$ је скуп свих уређених парова $(v,y) \in S$, када v ,,прође" кроз X , то јесте: $r_y(S) = \{(v,y) \in S \mid v \in X\}$

(2) $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ ***(принцип производа)***

доказ:

(1) Како је скуп $S \subseteq X \times Y$ дисјункнта унија скупова $l_x(S)$, $x \in X$, из (уопштене форме) принципа суме слиједи $|S| = \sum_{x \in X} l_x(S)$.

Слично, скуп S је и дисјункнта унија скупова $r_y(S)$, $y \in Y$, па поново из принципа суме слиједи $|S| = \sum_{y \in Y} r_y(S)$.

(2) Слиједи примјеном једнакости (1) на скуп $S = X \times Y$

■

напомена: Оба ова принципа се уобичајено називају принципом производа.

примјер 5. Ако је A коначан скуп од n елемената, тада његов партитивни скуп $P(A)$ има 2^n елемената.

рјешење: Нека је $B = \{0,1\}^n$, то јесте $B = \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{\times n}$.

коментар: Напоменути ученицима да:

- Елементи скупа B су $(0,1)$-низова дужине n. На даље ћемо их тако углавном и звати.
- за скуп од n елемената често се користи термин n-скуп.

Дефинишимо пресликавање $f : P(A) \to B$ на сљедећи начин. Ако је $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $X \in P(A)$:

$$f(X) = (y_1, \ldots, y_n), \text{ гдје је } y_k = \begin{cases} 1, a_k \in X \\ 0, a_k \notin X \end{cases}, \ 1 \le k \le n.$$

Лако се провјерава да је f бијекција, па на основу принципа једнакости слиједи $|P(A)| = B$, а на основу принципа производа $|B| = 2^n$.

■

Задаци за вјежбу

1. Колико има четвороцифрених бројева са свим различитим цифрама?

рјешење: $\overline{abcd}$ - четвороцифрени број.

Према принципу једнакости, довољно је одредити $|A|$, гдје је $A \subseteq \{0,1,2,\ldots,9\}^4$ тако да четворка $(a,b.c,d) \in A$ акко $a \ne 0$ и a,b,c,d су међусобно различите цифре. Према принципу производа $|A| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

■

2. Колико има парних четвороцифрених бројева са свим различитим цифрама?

рјешење: Нека је A скуп свих парних четвороцифрених бројева са различитим цифрама и $B_k \subseteq A$ скуп бројева из A чија је цифра јединица цифра k, $k \in \{0,2,4,6,8\}$. Тада је A дисјунктна унија скупова B_k, $k \in \{0,2,4,6,8\}$, па важи

$$|A| = \sum_{k \in \{0,2,4,6,8\}} B_k .$$

Према принципу производа, $|B_0| = 9 \cdot 8 \cdot 7$ и $|B_2| = |B_4| = |B_6| = |B_8| = 8 \cdot 8 \cdot 7$, па је $|A| = 2296$.

■

3. Колико има четвороцифрених бројева којима је збир цифре јединица и цифре десетица једнак 4?

рјешење: $\overline{abcd}$ - четвороцифрени број. За избор пара цифра (c,d) тако да је $c+d=4$ имамо 5 могућности. За избор пара цифра (a,b) имамо $9\cdot 10=90$ могућности. На основу принципа производа, број четвороцифрених природних бројева којима је збир цифре јединица и цифре десетица једнак 4 је 450.

■

4. Колико има непарних 5-цифрених бројева дјељивих са 5 којима су прва и последња цифра једнаке?

рјешење: $\overline{5bcd5}$ - непарни петоцифрени број дјељив са 5 чија су прва и последња цифра једнаке. Одговор, 10^3.

■

5. Тест се састоји од 5 питања на која се одговара заокруживањем одговора А, Б или Ц. На колико начина можемо рјешити тест ако је обавезно да одговорима на сва питања, а на колико ако није обавезно одговорити на сва питања?

рјешење:

(1) Ако је обавезно да одговорима на сва питања, постоји узајамно једнозначна коресподенција између скупа рјешења и уређених 5-орки скупа {А,Б,Ц}, а њих је 3^5.

(2) Ако није обавезно да одговорима на сва питања, постоји узајамно једнозначна коресподенција између скупа рјешења и уређених 5-орки скупа {А,Б,Ц,О}, гдје смо О придружили питању на који нисмо понудили ниједан од одговора. Дакле, рјешење је 4^5.

■

6. Марко воли шестоцифрене бројева код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три цифре, а Никола оне код којих је збир цифара на непарним мјестима једнак збиру цифара на парним мјестима. Колико има шестоцифрених бројева које воле и Марко и Никола?

рјешење: $\overline{abcdef}$ шестоцифрени број.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=d+e+f \\ a+c+e=b+d+f \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b-e=e-b \Rightarrow b=e,\ a+c=d+f\ .$$

- Цифру $b=e$ можемо изабрати на 10 начина

- Нека је $a+c=k$. Тада је $1 \le k \le 18$.

За $1 \le k \le 9$, пар (d,f) можемо изабрати на $k+1$, а пар (a,c) на k начина.

За $10 \le k \le 18$, оба пара пара: (d,f) и (a,c), можемо изабрати на $19-k$ начина.

На основу принципа суме и принципа производа (прецизније - принципа узастопног пребројавања), тражених бројева има

$$10 \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + \ldots + 1 \cdot 1) = 6150$$

■

За почетак оволико. На сљедећем часу подсјетићемо се Дирихлеовог принципа, а недјељу касније упознати са основним комбинаторним појмовима: комбинацијама и пермутацијама скупа и мултискупа, што људи са просјечним математичким образовањем (обично то и само то) подразумијевају под ријечју комбинаторика