Konačni i beskonačni skupovi

Milojica Jaćimović, Marija Jaćimović

Prirodonomatematički fakultet
81000 Podgorica, ul. Džordža Vašingtona bb, Crna Gora
Odsjek za matematiku, Univerzitet Crne Gore, Gimnazija "Slobodan Škerović, 81000 Podgorica, Montenegro
milojica@jacimovic.me

Počećemo osnovnim pojmovima.

Skup se sastoji od *elemenata*. Zapis $x \in A$ označava da je x je element skupa A ili da x pripda skupu A.

Kaže se da je skup B *podskup* skupa A i piše $B \subseteq A$ ako je svaki element skupa B element skupa A

Skupovi A i B su *jednaki* ako sadrže jedne te iste elemente, tj ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Ao je skup B podskup skupa A i ako skupovi A i B nisu jednaki, tada se kaže da je B *pravi podskup* skupa A i piše takodje $B \subseteq A$ ili $B \subset A$.

Prazan skup $\emptyset$ ne sadrži nijedan element i i on je podskup svakog skupa.

Presjek $A \cap B$ skupova A i B sastoji se od elemenata koji pripadaju i skupu A i skupu B. To se zapisuje na sljedeći način: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$.

Unija $A \cup B$ skupova A i B sastoji se od elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova A i B. To se zapisuje na sljedeći način: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$.

Razlika $A \setminus B$ skupova A i B sastoji se od elemenata koji pripadaju skupu A a ne pripadaju skupu B: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$. Akoje $B \subseteq A$, tada se razlika $A \setminus B$ naziva *komplementom* (ili *dopunom*) skupa B u odnosu na skup A.

Simetrčna razlika $A\Delta B$ sastoji se od elemenata koji pripadaju tačno jednom od skupova A i B :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus A \cap B).$$

Dekartov proizvod $A \times B$ skupova A i B je skup uredjenih parova (x, y), čija je prva komponenta element skupa A a druga element skupa B:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Ako je $A_i : i \in I$ proizvoljna familija skupova, tada važe de Morganove formule:

$$(\cup_{i\in I} A_i)^c = \cap_{i\in I} A_i^c, \ \ (\cap_{i\in I} A_i)^c = \cup_{i\in I} A_i^c$$

Dokažimo ove jednakosti. Prvo, ako $x \in (\cup_{i\in I} A_i)^c$ tada $x \notin \cup_{i\in I} A_i$, što znači je za svako $i \in I$, $x \notin A_i$, tj. za svako $i \in I$, $x \in A_i^c$. Odavde slijedi da $x \in \cap_{i\in I} A_i^c$. Obrnuto, ako $x \in \cap_{i\in I} A_i^c$ tada $x \in A_i^c$ za svako $i \in I$, odnosno za svako $i \in I$ $x \notin A_i$, odnosno

$x \notin \cup_{i\in I} A_i$što znači da $x \in (\cup_{i\in I} A_i)^c$. Time je dokazana prva jednkost. Druga se dokazuje na sasvim sličan način.

Pojam skupa u matematici pojavi se relativno nedavno, krajem 19. vijeka u vezi sa radovima njemačkog matematičara G. Kantora, o uporedjivanju moći skupova. Kasnije je uslijedio pokušaj da se novi pojmovi uvrste i u školske programe, ali uspjeh je bio samo djelimičan. Mi u ovom tekstu pretpostavljmo da us ovi pojmovi poznati i koristićemo ih slobodno, bez straha da tu postoje nedoumice. Skup opisujemo tako što nabrojimo elemente od kojih se sastoji. Recimo, skup čiji su element 1,3 i 6 označićemo sa $\{1, 3, 6\}$ i ovaj skup jednak je skupu $\{1, 1, 3, 3, 6\}$. Skup članova niza $a_1, a_2, a_3, \ldots$ označavamo sa $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ili čak sa $\{a_n\}$ ili preciznije sa $\{a_n : n \in N\}$.

Za skup A kažemo da je konačan ako postoji prirodan broj n i bijekcija $f : A \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada kažemo da skup A ima n elemenata ili da je njegov kardinalni broj jednak n. To zapisujemo na sljedeći način: $|A| = n$ ili sa $\#A$ ili $cardA = n$. Pitanja računanja broja elemenata različitih konačnih skupova pripadaju matematičkoj disciplini koja se naziva *kombinatorika.* Nekoliko primjera i osnovnih rezultata iz kombinatorike, slijede u nastavku. Pri tome, postoji bijekcija $f : A \mapsto B$ (tj. uzajamno jednoznačno preslikavanje) ako i samo ako je $|A| = |B|$. Uradićemo nekoliko primjera.

Dakle, slijedi nekoliko primjera iz kombinatorike, ali ćemo o kombinatornim problemima govoriti kasnije i opširnije. Počećemo jednostavnim primjerom iz knjige "Problems for Mathematicians Young and Old"poznatog matematičara P. Halmoša.

Primjer 1. Treba izračunati ukupan broj mečeva koji se odigraju na teniskom turniru na kojem učestvuje n (u knjizi Halmoša je 1025) igrača. Turnir se igra po principu "ko izgubi ispada". (Komentarušići zadatak, Halmoš piše da ovdje nije pitanje da li će neko ovaj (jednostavni) zadatak riješiti, već da li će naći pravo rješenje, koje će imati i estetsku vrijednost i pogoditi u srce problema.) Naime, u konkretnom slučaju sa 1025 igrača, broj mečeva u prvom, zatim u drugom itd. kolu,jednak je $512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 1024$. Može se, medjutim, uočiti da poslije svakog meča tačno jedan igrač ispada iz dalje igre, te da je pobjednik turnira jedini igrač bez izgubljenog meča. Dakle, imamo bijekciju koja svakom odigranom meču pridružuje igrača koji izgubi taj me. Slijedi da je broj mečeva odigranih na teniskom turniru sa n igrača jednak broju igrača koji su izgubili po jedan meč, odnosno taj broj je jednak $n - 1$, ili u konkretnom slučaju to je 1024.

1 Varijacije, permutacije, kombinacije.

Počećemo sa varijacijama skupa. Ističemo da se naša razmatranja odnose na konačne skupove, iako neki pojmovi, teoreme i koncepcije imaju smisla i važe i za beskonačne skupove.

k-varijacija (ili varijacija $k-$te klase) sa ponavljanjem skupa A je uredjena $k-$torka elemenata skupa A.

Definicijom je rečeno (a nazivom naglašeno) da se u uredjenim $k-$torkama elementi skupa mogu ponavljati. Pretpostavimo da je $|A| = n$ (sa $|A|$ označavamo broj elemenata skupa A). Tada za izbor svakog elementa (tj. svake komponente) $k-$torke postoji n mogućnosti. Slijedi da je broj $k-$varijacija skupa od n elemenata (oznaka $\overline{V_n^k}$) jednak n^k.

Primjeri varijacija sa ponavljanjem jesu brojevi sa fiksiranim brojem cifara. Naime, prirodnih brojeva koji su manji od 10^n (uključujući i nulu) ima tačno 10^n, dakle koliko i $n-$varijacija sa ponavljanjem skupa cifra $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. To su brojevi $0, 1, 2 \ldots, 999 \ldots 99 = 10^n - 1$ i njih smo mogli prebrojiti direktno, bez pozivanja na formulu za broj varijacija sa ponavljanjem.

Ako nas interesuje brojevi koji se pišu sa tačno n cifara, (koji dakle ne počinju cifrom 0), tada se njihov broj može racunati tako što se uoči da su to brojevi $10^{n-1}, 10^{n-1} + 1, \cdots 10^n - 1$, a njih je $10^n - 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$.

U mnogim primjerima, u formiranju $k-$torki skupa A nije dozvoljno ponavljanje elemenata. Ako je $k \leq n$, tada se od elementa $n-$elementnog skupa mogu formirati uredjene $k-$torke sa različitim elementima.

Ako je $k \leq n$, tada $k-$varijacijom (ili varijacijom $k-$te klase) bez ponavljanja $n-$elementnog skupa A nazivamo uredjenu $k-$torku različitih elemenata skupa A.

Broj $k-$varijacija bez ponavljanja skupa od n elemenata označavamo a V_n^k. U $k-$torci $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ za izbor prvog elementa a_1 postoji n različitih mogućnosti, za izbor drugog elementa a_2 (koji mora biti različit od a_1) ima $n - 1$ mogućnosti, i tako dalje, posljednji $k-$ti element se može birati iz skupa preostalih elemenata a njih je $n - k + 1$ na $n - k + 1$ načina. Slijedi da je broj $k-$varijacija bez ponavljanja $n-$elementnog skupa jednak

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Pošto se uredjena $k-$torka elemenata skupa A može definisati kao preslikavanje $f : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto A$, slijedi da se *$k-$varijacije skupa A* sa ponavljanjem mogu definisati kao preslikavanja skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup A, a za $k \leq n$, *k-varijacije bez ponavljanja n-elementnog skupa A* mogu definisati kao injekcije (to jest 1-1 preslikavanja) skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup A. Ako je $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ $k-$varijacija skupa A, tada je za $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $f(i)$ i-ta komponenta u uredjenoj $k-$torci $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$.

Permuatacija n-elementnog skupa A je n-varijacija bez ponavljanja tog skupa.

Drugim riječima, *permutacija $n-$elementnog skupa A je uredjena $n-$torka različitih elemenata skupa A*, odnosno, to je bilo koja *bijekcija* $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto A$.

Ako je $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ permutacija skupa A, tada je $\sigma(i)$ element skupa A koji u permutaciji σ stoji na $i-$tom mjestu, odnosno to je i-ta komponenta u odgovarajućoj $n-$torci elemenata skupa A. To znači da se permutacije skupa A mogu shvatiti kao različiti rasporedi (razmještaji) elemenata tog skupa. Odavde slijedi da permutacije skupa A možemo definisati i na sljedeći način.

Bijektivno preslikavanje $f : A \mapsto A$ nazivamo permutacijom skupa A.

U ovoj definiciji skup A može biti i beskonačan. Nas interesuju permutacije konačnih skupova. Ako je A skup sa n elemenata, tada je broj P_n permutacija jednak broju V_n^n, odnosno

$$P_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Dakle, imamo da je $P_1 = 1$, $P_2 = 2! = 2, P_3 = 3! = 6, P_4 = 24, P_5 = 120$, $P_6 = 720$. Broj permutacija P_n se uvećava jako brzo sa povećavanjem broja n. Naprimjer, ako bi trebalo napisati sve moguće rasporede (tj .permutacije) skupa od 52 elementa (to bi mogli biti svi rasporedi karata u špilu), tada ni računar sa velikim brojem procesora, u kome bi se operacije realizovale brzinom svjetlosti, ne bi to mogao uraditi u realnom vremenu.

Primjer 1. Zamislimo računar dimenzija $10\,m \times 10\,m \times 10\,m$, koji se sastoji od procesora stranice $\Delta = 10^{-10}m$ (to je poredak radijusa atoma). Broj procesora je tada manji od $\frac{10^3}{\Delta^3} = 10^3 \cdot 10^{30} = 10^{33}$. Ako se operacije vrše brzinom svjetlosti $c = 3 \cdot 10^8\, m/sec$, tada je za jednu operaciju jednom procesoru potrebno bar $\Delta/c = 10^{-18}/3$ sekundi, a broj operacija koje procesor može obaviti u jednoj sekundi nije veći od $c/\Delta = 3 \cdot 10^{18}$. Ukupan broj operacija koje bi takav računar mogao obaviti (ako procesori rade paralelno) u jednoj sekundi nije veći od $3 \cdot 10^{18} \cdot 10^{33} = 3 \cdot 10^{51}$, a u jednoj godini u kojoj ima $365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536000$ sekundi, broj operacija nije veći od $31536000 \cdot 3 \cdot 10^{51} \approx 9.46 \cdot 10^{58} < 10^{59}$.

Ovaj broj je veći od 46! i manji od 47!, dok je $52! \approx 8.06581752 \cdot 10^{67}$, pa bi *takvom računaru* trebalo više od 10^8 godina da ispiše sve moguće rasporede špila od 52 karte!

Permutacije (bijekcije) proizvoljnog skupa A čine grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja i značajan dio problema i stavova o permutacijama i opštih matematičkih stavova, vezan je za tu činjenicu. Naprimjer, razlozi za nemogućnost rješenja polinomijalne jednačine stepena većeg od četiri pomoću radikala, leže u svojstvima grupe permutacija korijena te jednačine. To je samo jedan primjer. Uloga permutacija u kombinatornoj teoriji je specifična, a permuatacije u matematici nisu isključivo kombinatorni objekti.

Primjer 2. Skup od n elemenata sadrži 2^n različitih podskupova. Zaista, ako primijetimo da u formiranju proizvoljnog podskupa (označio ga sa S) datog $n-$elementnog skupa A, za svaki element $x \in A$ postoje tačno dvije mogućnosti: $x \in S$ il $x \notin S$, odakle slijedi da je broj načina na koji se podskupovi skupa A mogu formirati jednak $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n\,puta} = 2^n$.

Predstavićemo, dakle, još nekoliko medjusobno bliskih ali formalno različitih i jednostavnih argumenata kojima se dokazuje prethodno tvrdjenje.

Primjer 3. Primijetimo da način na koji smo došli do prethodne formule sugeriše da se broj podskupova skupa A interpretira kao broj funkcija $f : A \mapsto \{0, 1\}$. Naime, svakom podskupu S skupa A možemo pridružiti *karakterističnu funkciju* $k_S : X \mapsto \{0, 1\}$, definisanu sa

$$k_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

U prethodnim razmatranjima (i u onima koja će uslijediti) nije bitna priroda elemenata skupa A, a i skup $\{0, 1\}$ može biti zamijenjen bilo kojim dvoelementnim skupom. Kako se za proizvoljne skupove X i Y skup funkcija $f : X \mapsto Y$ označava sa Y^X, prirodno je da se partitivni skup skupa A označi sa $\{0, 1\}^A$ ili sa 2^A. U ovim oznakama važi :$\left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Primjer 4. Za svaki podskup S $n-$elementnog skupa $A = \{a_0, a_1, \ldots a_{n-1}\}$, može se formirati broj

$$g(S) = k_S(a_{n-1})2^{n-1} + k_S(a_{n-2})2^{n-2} + \cdots + k_S(a_1)2 + k_S(a_0).$$

Preslikavanje g je injekcija i skup $\{g(S) : S \subseteq A\}$ njegovih vrijednosti je $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Prazan skup se preslikavanjem g slika u nulu: $g(\emptyset) = 0$. Skup S koji se sastoji od dva elementa a_1 i a_3 slika se u $2k_S(a_1) + 2^3 k_S a_3 = 2 + 2^3 = (1010)_2 = 10$. Odavde slijedi da je broj podskupova skupa A jednak 2^n, a preslikavanje g daje jednu numeraciju podskupova skupa A. Ako podskupove skupa A označimo sa A_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, tada je izborom broja k jednoznačno definisan podskup A_k skupa A. Recimo, ako je $k = 5 = (101)_2$, onda tom broju odgovara podskup $A_5 = \{a_0, a_2\}$. Očigledno, ako je $A_k \subseteq A_l$, tada je $k \leq l$. Obrnuto ne mora da važi, jer je, naprimjer $A_3 = \{a_0, a_1\} \not\subseteq A_5 = \{a_0, a_2\}$. Istaknimo važnu činjenicu da pri tome podskup n-elementnog skupa A koji odgovara broju k ne zavisi od n.

Primjer 5. Sada imamo mogućnost *kodiranja konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva.* Recimo, skup $S = \{1, 5, 7\}$ kodira se brojem $g(S) = 2^6 + 2^4 + 1 = (1010001)_2 = 64 + 16 + 1 = 81$, dok je brojem $s = 326 = 2^8 + 2^6 + 2^2 + 2^1 = (101000110)_2$ kodiran skup $\{2, 3, 7, 9\}$. Prazan skup se kodira brojem 0. Preslikavanje koje svakom konačnom podskupu S skupa prirodnih brojeva pridružuje broj $g(S)$ je injekcija i skup vrijednosti jednak je $\{0, 1, 2, \ldots\}$, a preslikavnje $F(S) = g(S) + 1$ je bijekcija skupa konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva i samog skupa prirodnih brojeva. Kažemo da su to skupovi iste kardinalnosti i da je skup svih konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva prebrojiv. Pri tome, ne postoji bijekcija $f : N \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$, pa *skup $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ nije prebrojiv.* To je posljedica Kantorove teoreme (Georg Cantor, 1845 - 1918, njemački matematičar) o kardinalnosti partitivnog skupa kojom se tvrdi da ne postoji bijekcija skupa A i njegovog partitivnog skupa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Predstavljajući u obliku niza i kodirajući odgovarajuće indekse na opisani način, dobijamo da je skup konačnih podskupova prebrojivog skupa, prebrojiv skup, o čemu će riječi biti kasnije.

Primjer 6. Napomenimo da se formula o broju podskupova konačnog skupa može dokazati indukcijom, tako što se prethodno izvede odgovarajuća rekurentna relacija. Ako sa c_n označimo broj podskupova n-elementnog skupa $A = \{a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, tada je svaki podskup skupa A istovremeno podskup skupa $B = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$. Nove podskupove skupa B možemo dobiti tako što svakom podskupu skupa A dodajemo element a_n. Od svakog podskupa skupa A dobijamo dva podskupa skupa B, pa je $c_{n+1} = 2c_n$. Kako je $c_1 = 2$, slijedi da je $c_n = 2^n$.

Primjer 7. Argumentacjom sličnom argumentaciji provedenoj u prethodnom primjeru, dokazaćemo da ako je A skup od n elemenata, tada postoji 3^n uredjenih parova (S, T) njegovih podskupova S i T, takvih da je $S \subseteq T$. Naime, za svaki takav par skupova definišimo funkciju $f_{S,T} : A \to \{0, 1, 2\}$ na sljedeći način

$$f_{S,T}(a) = \begin{cases} 0, & a \in A \setminus T \\ 1, & a \in T \setminus S \\ 2, & a \in S \end{cases}$$

Tada važe jednakosti $S = \{a_i \in A : f_{S,T}(a_i) = 2\}$ i $T = \{a_i \in A : f_{S,T}(a_i) \neq 0\}$. Preciznije, svaka funkcija $f : A \mapsto \{0, 1, 2\}$ jednoznačno odredjuje skupove $S = \{x \in A : f(x) = 2\}$ i $T = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, pri čemu je $S \subseteq T$. To znači da traženih parova podskupova

(S,T) ima koliko i preslikavanja $f : A \mapsto \{0,1,2\}$. Svako takvo preslikavanje (za fiksirane S i T) možemo opisati brojem čiji zapis u sistemu sa osnovom tri ima oblik

$$F(S,T) = (f_{S,T}(a_{n-1}) \cdots f_{S,T}(a_1) f_{S,T}(a_0))_3 = f_{S,T}(a_{n-1})3^{n-1} + \cdots + f_{S,T}(a_1)3 + f_{S,T}(a_0)$$

i svaki zapis broja u sistemu sa osnovom tri definiše jednu funkciju $f_{S,T}$, odakle slijedi da je broj takvih parova jednak 3^n. Moguće je, dakle, kodirati sve parove (S,T) konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva, takvih da je $S \subseteq T$. Naprimjer, broj $k = (34)_{10} = (1022)_3$ ukazuje da 1 i 2 pripadaju i skupu S i skupu T, da 3 ne pripada nijednom od ovih skupova, te da 4 pripada samo skupu T, tj. ovom broju odgovara par podskupova $S = \{1,2\}$ i $T = \{1,2,4\}$.

Učenici bi mogli da se zanimaju pitanjem kada za parove (S,T) i (P,Q) podskupova skupa prirodnih brojeva važi nejednakost $F(S,T) < F(P,Q)$.

Primjer 7a. (Čehoslovačka 1973) Koliko parova disjunktnih podskupova ima skup koji se sastoji od n elemeneta.

Rješenje. Slično argumentima koje smo koristili u prethodnom primjeru i u primjerima 2-5. imamo da ako je dat uredjeni par disjunktnih skupova, tada za svaki element imamo jednu od tri mogućnosti: ili taj element pripada prvom skupu ili pripada drugom skupu ili ne pripada nijednom od njih. Dakle, ukupan broj uredjenih parova disjunktnih podskupa n-elementnog skupa jednak 3^n. Medju njima je uredjen par koji se sastoji od dva prazna skupa. Od ostalih $3^n - 1$ parova imamo $\frac{3^n-1}{2}$ različitih neuredjenih parova. Ako dodamo još par koji se sastoji od dva prazna skupa, dobijamo ukupno $\frac{3^n-1}{2} + 1 = \frac{3^n+1}{2}$ parova disjunktnih podskupova skupa od n elemenata.

$k-$elementni podskup konačnog skupa A naziva se $k-$kombinacijom (ili kombinacijom $k-$te klase) elemenata skupa A.

Naravno, ako je A skup sa n elemenata i $k > n$, tada ne postoje podskupovi skupa A prirodan broj, tada svaki k-elementni podskup skupa A sa k elemenata. Slijedi da se o $k-$kombinacijama ima smisla govoriti samo ako je $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

Na primjer, ako je $A = \{1,2,3,4\}$ tada postoji šest 2-kombinacija skupa A. To su kombinacije $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Primjer 8. Broj $k-$kombinacja skupa od n elemenata označava se sa $\binom{n}{k}$ ili sa C_n^k i čita "n nad k"ili "k od n"ili "k iz n". Od jedne (izabrane) $k-$kombinacije skupa od n elemenata, permutacijama tih k elemenata može se formirati $k!$ k-varijacija (bez ponavljanja) istog skupa. Slijedi da je $V_n^k = k! C_n^k$, odnosno

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Napomena (eventualno samo pomenuti učenicima a onda predložiti da nadju način kako bi se kombinacije mogle definisati kao preslikavanja ili prosto zaobići ovu napomenu Slično varijacijama i permutacijama, i kombinacije se mogu definisati kao preslikavanja. Naprimjer, $k-$kombinacije skupa $A = \{1,2,\ldots,n\}$ mogu se definisati kao strogo monotono rastuća preslikavanja $f : \{1,2\ldots,k\} \mapsto A$, tj. kao uredjene $k-$torke različitih elemenata skupa A, napisanih u rastućem poretku. Ako je

$A = \{a_1, a|2, \ldots, a_n\}$ konačan skup, tada na njemu možemo definisati poredak $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \cdots \prec a_n$ i $k-$kombinaciju elemenata skupa A kao strogo rastuće preslikavanje $f : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto A$. Očigledno, svako takvo preslikavanje je injektivno.

Kombinacije $k-$te klase je moguće definisati i kao klase ekvivalencije u odnosu na relaciju "$\sim$"definisanu na skupu injektivnih preslikavanja $f : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto A$ na sljedeći način: $f \sim g \Leftrightarrow f(\{1, 2, \ldots, k\}) = g(\{1, 2, \ldots, k\})$.

Brojeve $\binom{n}{k}$, (s obzirom na njihovu ulogu u binomnoj formuli) nazivamo *binomnim koeficijentima.* Ako je $k > n$ ili $k < 0$, tada ćemo pisati $\binom{n}{k} = 0$.

Primjer 8a. (Srbija 2004) Neka je A skup koji se sastoji od 6 elemenata. Dokazati da u svakoj familiji $\{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$ različitih troelementnih podskupova skupa A, postoje 3 rzličita skupa, A_i, A_j i A_k, koji su podskupovi istog četvorolementnog podskupa skupa A.

Rješenje. Postoji $\binom{6}{3} = 20$ troelementnih i $\binom{6}{4} = 15$ četvoroelementnih podskupova skupa A. Tih 20 troelemnntnih skupova su zapravo 10 parova oblika $B, A \setminus B$. Slijedi da u jedanaest skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ postoje dva: A_i i A_j takvi da je $A_i = A \setminus A_j$. Neka su to skupovi A_1 i $A_2 = A \setminus A_1$. Preostalih 9 skupova iz spiska od 11 iz familije, ili imaju dvoelementni presjek sa A_1 i jednoelementni sa A_2 ili obrnuto, jednoelemntni presjek sa A_1 i dvoelementni sa A_2. Od njih bar 5 ima koji imaju jednoelementni presjek sa A_2 (ili sa A_1). Medju tih 5 skupova bar dva A_i i A_j imaju isti jednoelementni presjek $\{a\}$ sa A_2. Tada je $|A_i \cup A_j \cup A_1| = 4$, pa su to traženi skupovi.

Drugo rješenje može se zasnovati na prezentaciji situacije grafom čijih 35 čvorova odgovara troelementnim (njih je 20) i čevoroelementnim podksupovima (njih je 15). Dva čvor su vezana ivicom ako je jedan od njih pravi podskup drugog. Očigledno postoje samo ivice koje spajaju čvorove koji odgovaraju troelementnim i četvorelementnim. Za svaki troelementni čvor postoje tačno tri čvora sa kojima je povezan, a za svaki četvoroelementni čvor postoje tačno 4 čvora sa kojima je povezan. Ukupan broj ivica u grafu je 60. Uočimo sada podgraf koji se dobija brisanjem bio kojih 9 troelementnih čvorova i svih ivica koje iz njih polaze. Ostaje nam 11 čvorova koji odgovraju troelementim skupovima, koji zadovoljavaju uslove zadatka. Dakle, preostali graf odgovora familiji grafova iz postavke našeg zadatka. Preostale su 33 ivice, što znači da je bar jedan od 15 četvorelementnih čvorova povezan sa više od dva troelementna čvora. T su traženi troelementni skupovi.

Primjer 9. Do još jedne interpretacije binomnih koeficijenata dolazi se rješavanjem zadatka o broju najkraćih puteva od tačke O sa koordinatama $(0, 0))$ do tačake $T(m, n)$, gdje su m i n nenegativni cijeli brojevi, kretanjem po pravama paralelnim koordinatnim osama, koje prolaze kroz tačke sa cjelobrojnim koordinatama. (Takvu konfiguraciju zvaćemo clelobrojnom mrežom ili cjelobrojnom rešetkom). Iz razloga simetričnosti, taj broj je jednak broju najkraćih puteva od tačke $O(0, 0)$ do tačke $T'(n, m)$. Ako kretanje (za jedno polje) udesno označimo sa d a kretanje nagore sa g, tada se najkraći putevi definišu $(m + n)$-torkama koje se sastoje od m slova d i n slova g. Različite $(m + n)-$torke $d-$ova i g-ova definšu različite puteve. Svaki od tih puteva definisan je rasporedom m slova d na mogućih $(m + n)$ pozicija, dakle biranjem m od $(m + n)$ mogućnosti, ili, u drugačijim oznakama, biranjem m brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, m + n\}$. Taj broj jednak je $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$. Primijetimo i da je to istovremeno i broj najkraćih puteva od tačke $A(p,q)$ do tačke $B(p+m, q+n)$.

Slijedi da se broj $\binom{n}{k}$ može interpretirati kao broj najkraćih puteva po horizontalama i vertikalama cjelobrojne rešetke od tačke $O(0,0)$ do tačke $T(n-k,k)$, odnosno do tačke $T'(k,n-k)$. Translacijom za vektor (p,q) sa cjelobrojnim koordinatama, dobijamo da je broj $\binom{n}{k}$ jednak broju najkraćih puteva od tačke $A(p,q)$ do tačke $B(n-k+p, k+q)$. Odavde slijedi da je broj najkraćih puteva od tačke $O(0,0)$ do tačke $T(m,n)$ koji prolaze kroz tačku $T_1(k,l)$ $(k \leq m; l \leq n)$ jednak je $\binom{k+l}{l} \cdot \binom{m+n-k-l}{n-l}$.

U primjerima koji slijede koristićemo različite interpretacije kombinatornih pojmova, što će rezultirati različitim dokazima kombinatornih stavova.

Primjer 10. Kombinatorni dokaz jednostavne jednakosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

sastoji se u tome što se uoči da u n-članom skupu A, svakom podskupu C od k elemenata odgovara tačno jedan podskup (to je komplement skupa C) od $(n-k)$ elemenata. U drugim terminima, preslikavanje koje svakom $k-$elementnom podskupu C skupa A pridružuje njegov komplement C^c koji ima$n-k$ elementa je bijekcija. Drugim riječima, birajući tim iz skupa kandidata, istovremeno se odredjuje ko nije u timu. Dakle, broj $k-$članih podskupova $n-$elementnog skupa jednak je broju $(n-k)-$članih podskupova.

U interpretaciji binomnih koeficijenata kao broja najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži, ova jednakost je posljedica geometrijski očigledne činjenice da je broj takvih puteva od tačke $O(0,0$ do tačke $T(n-k,k)$ jednak broju puteva od $O(0,0)$ do $T'(k,n-k)$.

Podsjetimo na vrlo jednostavni algebarski dokaz:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Napomena. (tekst koji slijedi u okviru ove naomene i tekst u Primjeru 11 i Primjeru 12 može se zaobići i eventualno pomenuti samo formulu na kraju Primjeru 12, ili čak ni to) U formiranju kombinatornih konfiguracija elemenata konačnog skupa, ponekad je prirodno pretpostaviti da se elementi tog skupa mogu ponavljati. Na primjer, ako su u četiri kutije smještene kuglice, po 10 kuglica u svakoj kutiji, tako da su u istoj kutiji kuglice iste boje a u različitim kutijama kuglice različitih boja, (u prvoj kutiji su bijele u drugoj crne, u trećoj plave i u četvrtoj zelene kuglice) pa se iz tih kutija uzima ukupno 3 kuglice, onda su mogući rezultati: *bbb*, $\ldots$, *zzz*, *bbc*, $\ldots$, *zzp*, $\ldots$, *bcp*, $\ldots$, *bpz* (ukupno ima 20 mogućnosti). Ovakve konfuguracije nazivamo kombinacijama sa ponavljanjem. I kombinacije sa ponavljanjem mogu se definisati pomoću preslikavanja.

Primjer 11. Pretpostavimo da je na konačnom skupu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ definisan strogi poredak $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n$. *$k-$kombinacijom (ili kombinacijom $k-$te klase) sa ponavljanjem* elemenata skupa A naziva se $k-$torka $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$ vrijednosti funkcije $f : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto A$ koja zadovoljava uslov monotonosti: $f(1) \preceq f(2) \preceq \cdots \preceq f(k)$.

U prethodnoj definiciji moguće je, umjesto o $k-$torci elemenata skupa A, govoriti prosto o funkciji $f:\{1,2,\ldots,k\}\mapsto A$. Drugim riječima, svaka kombinacija sa ponavljanjem skupa $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ odredjena je preslikavanjem $f:A\mapsto\{0,1,2,\ldots\}$, u kojem jednakost $f(a)=r$ označava da se u toj kombinaciji element a pojavljuje r puta. Kombinacija $k-$te klase odredjena je dodatnim uslovom $f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1})=k$.

Čitaocu ostavljamo da dokaže da za broj $\overline{C_n^k}$ k-kombinacija sa ponavljanjem $n-$elementnog skupa A važi jednakost

$$\overline{C_n^k}=\binom{n+k-1}{k}.$$

Primjer 12. Da bismo dokazali ovu jednakost, svakoj k-kombinaciji sa ponavljanjem pridružimo niz nula i jedinica tako što prvo ispišemo $(n-1)$ nula a izmedju $(i-1)$-ve i i-te nule postavimo onoliko jedinica koliko se nalazi elemenata a_i u toj kombinacji, tj. postavimo $f(a_i)$ jedinica. Na primjer, ako je $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_5\}$ tada za 6-kombinaciju sa ponavljanjem a_1,a_1,a_1,a_4,a_4,a_5 postavljamo $1,1,1,0,0,0,1,1,0,1,0$. Na taj način svakoj kombinaciji pridružujemo $(n-1+k)$-torku nula i jedinica, u kojoj je $(n-1)$ nula i k jedinica. To pridruživanje je bijektivno, pa je potrebno izračunati broj takvih $(n+k-1)$-torki. Situacija je ista kao da imamo $n-1+k$ objekata i od njih treba odabrati k objekata (tj. k pozicija na kojima će stajati jedinice). Takvih izbora ima $\binom{n+k-1}{k}$, pa je dakle

$$\overline{C_n^k}=\binom{n+k-1}{k}.$$

Primjer 13. Ako n pisama treba uručiti na n adresa a pijani poštar to radi na slučajan način, ne gledajući adrese, prirodno je postaviti pitanje kolike su šanse da bar jedno pismo bude uručeno na pravu adresu, odnosno kolike su šanse da nijedno pismo ne bude uručeno na pravu adresu.

Zadatak možemo formulisati apstraktno: *Koliko permutacja $\sigma:S\mapsto S$ skupa $S=\{1,2,\ldots,n\}$ ima bar jedan fiksni element, tj. za koje postoji $i\in S$ takvo da je $\sigma(i)=i$.*

Naravno, time ćemo riješiti i zadatak o broju permutacija bez fiksnih elemenata.

Nije jasno kakve odgovore možemo očekivati. Odgovor se ne može naslutiti čak i ako se pitanje reducira na: da li se sa povećanjem broja n šanse da bar jedno pismo bude uručeno na pravu adresu povećavaju ili smanjuju. Za male n odgovori su jednostavni, ali svejedno zanimljivi.

Za $n=2$ imamo svega dvije permutacije: jedna je osnovna, i oba elementa su fiksna, a druga je permutacija σ za koju je $\sigma(1)=2,\sigma(2)=1$, i ona nema fiksnih elemenata. Dakle, šanse da pijani poštar bar jedno od dva pisma uruči na pravu adresu iznose 50% i tada će oba pisma biti uručena na prave adrese.

Ako je $n=3$, zadatak se može riješiti prosto pisanjem svih $6=3!$ permutacija: $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ i zatim brojanjem onih koje imaju bar jedan fiksni element: (to su $(1,2,3),(1,3,2).(2,1,3),(3,2,1)$), odnosno brojanjem permutacija koje nemaju fiksnih eleemnata. Dobija se da su šanse da pijani poštar napravi potpuni haos u ovom slučaju iznosi $2/6=1/3\approx 33\%$. Za $n=4$, pišući svih 24 permutacije: $((1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2),(2,1,3,4),(2,1,4,3),(2,3,1,4),$ $(2,3,4,1),(2,4,1,3),(2,4,3,1),(3,1,2,4),(3,1,4,2),(3,2,1,4),(3,2,4,1),$

$(3,4,1,2),(3,4,2,1),(4,1,2,3),(4,1,3,2),(4,2,1,3),(4,2,3,1),(4,3,1,2),(4,3,2,1))$ dobijamo da njih 9 nema fiksnih tačaka (to su permutacije: $(2,1,4,3),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,1,4,2)$, $(3,4,1,2),(3,4,2,1),(4,1,2,3).(4,3,1,2),(4,3,2,1))$, a to je $9/24 = 37.5\%$ svih permutacija skupa od četiri elementa. Za $n = 5$ od ukupno 120 permutacija njih 44 nema fiksnih elemenata, a to je oko 36.7%.

Riješimo zadatak u opštem slučaju. Sa S_i označimo označimo skup permutacija $\sigma : S \mapsto S$ za koje je $\sigma(i) = i$. Tada $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ skup svih permutacija $\sigma : S \mapsto S$ skupa S za koje postoji bar jedno $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takvo da je $\sigma(j) = j$.

Primjer 14. Za potpuno rješenje ovog zadatka, izračunaćemo broj elemenata unije konačnog broja konačnih skupova, odnosno dokazaćemo poznatu formulu uključivanja i isključivanja

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| + \cdots +$$

$$(-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap Si_2 \cap \cdots \cap S_{i_k}| + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|$$

Prethodna formula je intuitivno jasna. Njome se ukazuje da kada se broje elementi unije skupova, onda prvo treba pebrojati elemente svih skupova pojedinačno i sabrati ih, pa onda "isključiti"elemente koje smo brojali dva puta, (tj. one koji se nalaze bar u dva skupa) zatim ponovo uključiti elemente koji su u prethodnom koraku isključeni oni elementi koje treba brojati (to su oni koji se nalaze u tri skupa) itd.

Izložićemo prvo *kombinatorni dokaz*, koji je, po našem mišljenju, jednostavniji i direktniji od dokaza matematičkom indukcijom, koji se najčešće nalazi u udžebinicima. Ako za element $x \in S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ medju skupovima $S_1, S_2, \ldots, Sn$ postoji tačno k njih koji sadrže element x, i ako takve situacije evidentiramo odgovarajućim brojem jedinica, tada uniji na lijevoj strani pridružili broj jedan a na desnoj broj jedinica u pojedinim sabircima iznose $k = \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots, \binom{k}{k} = 1$, a uzumijaći u obzir predznake u sumi imamo da desnoj strani odgovara broj jedinica koji je jednak

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} = 1 - (1-1)^k = 1.$$

Odavde slijedi formula uklučivanja i isključivanja.

U drugom relativno jednostavnom dokazu formule uključivanja-isključivanja koristićemo neka jednostavna svojsva karakterističnih funkcija. Sa U označimo neki skup koji sadrži skupove $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Dalje, za $A \subseteq U$ sa $k_A : U \to \{0, 1|$ označimo karakterističnu funkciju skupa A. Ona je jednaka 1 na A i jednaka je 0 na $X \setminus A$. Tada je za svaki konačni podskup skupa U, $|A| = \sum_{x \in U} k_A(x)$. Primijetimo da za proizvoljni podskup A skupa U važi: $k_{A^c}(x) = k_{X \setminus A}(x) = 1 - k_A(x$. Pored, toga očigledno za podskupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ skupa U važi:

$$k_{\cap_{i=1}^n A_i}(x) = \Pi_{i=1}^n k_{A_i}(x),$$

i na osnovu de Morganovih formula

$$k_{\cup_{i=1}^n A_i}(x) = k_{(\cap_{i=1}^n A_i^c)^c}(x) = 1 - k_{\cap_{i=1}^n A_i^c}(x) = 1 - \Pi_{i=1}^n (1 - k_{A_i}(x)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_{A_i}(x) - \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le n} k_{A_{i_1}}(x)k_{A_{i_2}}(x)+$$

$$\cdots+(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} k_{A_{i_1}}(x)k_{A_{i_2}}(x)\cdots k_{A_{i_k}}(x)+\cdots+(-1)^{n+1}k_{A_1}(x)k_{A_2}(x)\cdots k_{A_n}(x).$$

Odavde slijedi

$$|\cup_{I=1}^{n} S_i| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| + \cdots +$$

$$(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |S_{i_1} \cap Si_2 \cap \cdots \cap S_{i_k}| + (-1)^{n+1}|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|$$

Time je formula uključivanja -isključivanja dokazana. Vratimo se na pitanje. Podsjetimo, u našem primjeru smo sa S_i označili skup permutacija σ za koje je $\sigma(i) = i$ Imamo da je za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|S_i| = (n-1)!$, jer ako se fiksira element i na i-tu poziciju onda se ostalih $(n-1)$ elemenata skupa S može rasporediti na $(n-1)!$ načina. Broj sabiraka u prvoj sumi jednak je n, pa je $\sum_{i=1}^{n} |S_i| = (n-1)!n = n!$. Dalje, ako fiksiramo dva elementa i_1 i i_2 na pozicije i_1 i i_2, a ostale brojeve iz skupa S rasporedjujemo slobodno, tada je broj takvih permutacija jednak $(n-2)!$, a broj sabiraka u drugoj sumi jednak je broju načina na koji se fiksraju dvije od n pozicija, odnosno, taj broj je jednak $\binom{n}{2}$. Druga suma jednaka je $\sum_{i_1<i_2}^{n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!}$. Uopšte, u $k-$oj sumi ima $\binom{n}{k}$ sabiraka, jer je to broj načina na koji se može fiksirati k od n pozicija, a svaki od sabiraka $|S_{i_1} \cap Si_2 \cap \cdots \cap S_{i_k}|$ jednak je $(n-k)!$, jer se fiksiranjem k elemenata na k pozicija od ostalih $(n-k)$ elemenata može napravti $(n-k)!$ permutacija. Slijedi da je $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} |S_{i_1} \cap Si_2 \cap \cdots \cap S_{i_k}| = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$. Ukupno, imamo da od $n!$ permutacija bar jedan fiksni element ima njih

$$s_n = |S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = n! - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!}.$$

Broj permutacija koje nemaju fiksnih elemenata jednak je

$$n! - s_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) \approx n!e^{-1} = t_n,$$

pri čemu se greška G_n koja se pravi ovom aproksimacijom može ocijeniti (dosta grubo) sa

$$|G_n| = |n!e^{-1} - n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)| \le \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \le 1/2.$$

Odavde slijedi da je broj permutacija skupa od n elemenata, koje nemaju fiksnih elemenata, jednak cijelom broju koji je najbliži broju $t_n = n!e^{-1}$. U odnosu na ukupan broj permutacija, broj t_n čini $\frac{t_n}{n!} = e^{-1} \approx 36.79\%$. Zanimljivo je da se već za $n \ge 5$ tačna vrijednost količnika $\frac{s_n}{n!}$ nalazi se izmedju 36.6% i 36.9%.

Rezultat se naravno može interpretirati i na druge načine, ne obavezno kao zadatak o podjeli pisama. Naprimjer, ako n osoba sjedne na slučajan način na n stolica, ne vodeći računa o planu koji je prethodno napravljen, vjerovatnoća da niko neće biti na svom mjestu je oko 37%.

Primijetimo da se formula $t_n = n!e^{-1}$ može koristiti za računanje broja permutacija bez fiksnih tačaka. Recimo, kako je $t_5 = 5!e^{-1} \approx 44.1$ slijedi da od 120 permutacija skupa od $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ elemenata njih 44 su permutacije bez fiksnih elemenata, dok je $t_8 \approx 14832.9$, pa je od 40320 permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ njih 14833 bez fiksnih tačaka. Greške koje se prave kada se broj permuataicija bez fiksnih elemenata računa na ovaj način, za velike vriejdnosti n, su male, ali to je zaključak koji ne možemo tako jednotavno provjeriti na konkretnim primjerima.

Primjer 15.(i ovaj primjer se može zaobići i samo pomenuti problem) Ako se u prethodnom zadatku ukine uslov bijektivnosti i posmatraju sva preslikavanja $f : S \mapsto S$, kojih ima n^n, tada je procenat preslikavanja bez fiksnih tačaka u skupu svih preslikavanja $f : S \mapsto S$ blizak procentu bijekcija bez fiksnih tačaka u skupu svih bijekcija skupa S. (U interpretaciji podjele pisama od strane poštara, to odgovara situaciji kada poštar može više pisama predati jednoj, bez obzira što su pisma adresirana na različite osobe.) Preslikavanje $f : S \mapsto S$ zadovoljava dati uslov (tj. nema fiksnu tačku) ako je za svako i, $f(i) \in S \setminus \{i\}$. Ako funkciju f prezentiramo kao uredjenu $n-$torku $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$, tada svaka od komponenti $f(i)$ može uzeti $(n-1)$ vrijednosti. Drugim rječima, broj funkcija $f : S \mapsto S$ bez fiksne tačke jednak je $|S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n| = (n-1)^n$. Ukupan broj preslikavanja $f : S \to S$ jedanak je n^n, pa imamo sljedeću ocjenu

$$\frac{(n-1)^n}{n^n} = (1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1} \text{ kada } n \to \infty.$$

Primijetimo da se učešće preslikavanja bez fiksnih tačaka u ukupnom broju preslikvanja povećava kada se povećava kardinalnost skupa S (to slijedi iz nejednakosti $(1 - \frac{1}{n})^n < (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$ i da je za veliko n, taj procenat blizak broju $e^{-1} \approx 37\%$. Broj preslikavanja koja imaju bar jednu fiksnu tačku jednak je $n^n - (n-1)^n$, a njihov udio u ukupnom broju preslikavanja jednak je $1 - (1 - 1/n)^n \to 1 - e^1 \approx 63\%$ kada $n \to \infty$.

U sljedećoj tabeli dati su rezultati za bijekcije i za sva preslikavanje. Oznake: $n-$ broj elemenata skupa S, *nb*- broj bijekcija skupa S, $nbbft$- broj bijekcija skupa S bez fiksnih tačaka, *pb*-procenat bijekcija, *np*-broj preslikavanja $f : S \mapsto S$, *npbft*- broj preslikavanja $f : S \mapsto S$ bez fiksnih tačaka, *pp*-procenat bijekcija

n	nb	$nbbft$	pb	np	$npbft$	pp
2	2	1	50%	4	1	25%
3	6	2	33%	27	8	30%
4	24	9	37.5%	256	81	32%
5	120	44	36.7%	3125	1024	32.7%

Primjer 16.(IMO 2004, ShortList)-za samostalni rad. Na univerzitetu koji broji 10001 studenata, formiraju se studentski klubovi. Jedan student može biti član više klubova. Neki klubovi se udružuju u društva. Pri tome važe sljedeća pravila:

(i) Svaki par studenata je u tačno jednom klubu;

(ii) Za svakog studenta i svako društvo postoji tačno jedan klub iz tog društva čiji je član taj student;

(iii) Svaki klub se sastoji od neparnog broja studenata, pri čemu je klub od $2m+1$ studenata učlanjen u tačno m društava.

Odrediti sve moguće vrijednosti za ukupan broj k društava.

Rješenje. Označimo sa T skup uredjenih trojki (a, C, S), gdje je A student, C - klub, S je društvo, tako da $a \in C, C \in S$. Računano $|T|$ na dva načina.

Fiksirajmo studenta a i društvo S. Prema (ii) postoji tačno jedan klub, takav da $(a, C, S) \in T$. Pošto uredjeni par (a, S) može biti izabran na nk načina, gdje je n broj studenata, a k traženi broj društava. Dakle, $|T| = nk$.

Sada fiksiramo klub C, Prema (iii) C je u tačno $\frac{(|C|-1)}{2}$ društava, tako da ukupno ima $|C|\frac{(|C|-1)}{2}$ trojki iz T sa drugom koordinatom C. Ako sa A označimo skup svih klubova, tada ćemo imati: $|T| = \sum_{C\in A} \frac{|C|(|C|-1)}{2}$. Ali iz uslova (i) slijedi da je $\sum_{C\in A} \frac{|C|(|C|-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dakle:

$$|T| = \frac{n(n-1)}{2} = nk,$$

odakle slijedi da je $k = \frac{n-1}{2} = \frac{10.001-1}{2} = 5.000$ društava.

2 Paradoks beskonačnosti.

Paradoksi se u matematici mogu javiti iz dva razloga.

Prvo, paradoksi mogu biti posledice neodgovarajućih pretpostavki odredjene matematičke teorije. Oni se mogu eliminisati revizijom teorije u kojoj su nastali. Takvi su, na primjer, paradoks skupa svih skupova, ili Raselov paradoks, koji je prevazidjen aksiomatskim zasnivanjem teorije skupova. Berijev paradoks "najmanjeg broja koji se ne može izraziti sa manje od šezdest znakova a upravo smo to učinili sa pedeset devet slova, posledica je neprecizno formulisanog pojma izražavanja brojeva i kada se on korektno formuliše Berijev paradoks nestaje. Ovakvu upotrebu termina paradoks ostavila je filozofsko matematička tradicija, ali se podrazumeva da se tu prosto radi o matematičkoj pogrešci, koja se ili otklanja ili se cijela teorija dovodi u pitanje.

Drugačija je situacija sa paradoksalnim matematičkim rezultatima koji su matematički korektni ali veoma protivreče našoj intuiciji nijesu otklonjivi revizjom pretpostavki na kojima su zasnovani. U tom slučaju, ostaje nam jedino da se na takav rezultat naviknemo i da ga prihvatimo.

Primjer 1. (Paradoks beskonačnosti) Evo jedne interpretacije ovog paradoksa. Ako je $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i $N = \{1, 2, \ldots\}$, tada je funkcija $f : N_0 \to N$ definisana sa $f(x) = x + 1$ bijekcija. Drugačije, skup N je ekvivalentan sa svojim pravim dijelom. Ovo svojstvo beskonačnih skupova bilo je poznato još Galileju. Zanimljiv je dijalog iz njegove knjige "Besjede i matematički dokazi"iz 1683 godine.

- Ako vas sada pitam koliko ima kvadrata (prirodnih brojeva) reći cete da ih je isto koliko i korijena, jer svaki kvadrat ima svoj korijen i obratno, svaki korijen ima svoj kvadrat, pri čemu nijedan kvadrat nema više od jednog korijena i nijedan korijen nema više od jednog kvadrata

- Sasvim tačno

- Ako vas sada pitam koliko ima kvadrata nećete poreći da ih onoliko koliko i svih (prirodnih) brojeva, jer nema toga broja koji ne može biti korijen nekog kvadrata. Utvrdivši ovo moramo prihvatiti da kvadrata ima isto koliko i svih brojeva, jer isto toliko ima i korijena, a korijeni mogu biti svi brojevi.

Galilej je zaključio da za beskonačne skupove ne možemo govoriti da li imaju manje ili više elemenata. Interesantno je kako Galilej pažljivo dokazauje da je preslikavanje $f : N \to \{1, 4, \ldots, \}$ definisano formulom $f(x) = x^2$ bijekcija, posebno dokazujući da je ono "1-1"i "na".

3 Skupovi iste kardinalnosti

Nas će zanimati i neki geometrijski aspekti paradoksa beskonačnosti.

O geometrijskim paradoksima, govorićemona kraju, a sada nekoliko napomena o broju elemenata skupa. Umjesto da se kada su u pitanju beskonačni skupovi, odbaci ideja brojanja elemeneta, pravi se drugačiji prilaz tom problemu.

Definicija. Skup A je iste moći (ili ekvipotentan, ili iste kardinalnosti, ili ima isti kardinalni broj) sa skupom B ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Tada pišemo $A \sim B$ ili

$|A| = |B|$ ili $card(A) = card(B)$.

Očigledno $A \sim A$, te ako je $A \sim B$ i $f : A \to B$ bijekcija, tada je $f^{-1} : B \to A$ takodje bijekcija, dakle tada je $B \sim A$. Dalje, ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, tada postoje bijekcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada je preslokavanje $h = g \circ f : A \to C$ bijekcija, što znači da je $A \sim C$. Dakle, imamo tri važna svojstva: (i) $A \sim A$; (ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ i (iii) $A \sim B \wedge C \Rightarrow A \sim C$.

Za konačne skupove važi: $A \sim B \iff |A| = |B|$. Zbog toga možemo reći da pojam jednake moći skupova u nekom smislu proširuje pojam broja elemenata skupa na beskonačne skupove.

Za skup A kažemo da je *prebrojiv* ako je ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva, tj. ako postoji bijekcija $f : N \to A$. Tada se piše $|A| = \aleph_0$ i čita "kardinalni broj skupa A jednak je alef nula". Ako sa x_i označimo element skupa A koji u toj bijekciji odgovara prirodnom broju i, tada dobijamo da je skup A prebrojiv ako i samo ako se može predstaviti u obliku niza $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Za skup koji je konačan ili prebrojiv kažemo da je najviše prebrojiv.

Primjer 17. Skup cijelih brojeva je prebrojiv, jer se taj skup može napisati kao niz $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.

Primjer 18. Na osnovu Primjera 5, skup svih konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva je prebrojiv.

Primjer 19. (a) Svaki podskup prebrojivog skupa je ili konačan ili prebrojiv. Zaista, ako je A prebrojiv skup, tada se taj skup može napisati u obliku niza $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Ako je $A' \subseteq A$ i ako sa a_{n_k} označimo $k-$ti element gornjeg niza koji pripada skupu A'. Ako se ispostavi da je postoji element $a_{n_m} \in A$ sa najvećim indeksom koji pripada A', tada je skup $A' = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_m}\}$ konačan skup, $|A'| = m.$; u protivnom dobiajmo niz $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ koji čine elementi skupa A', što znači da je A' predstavljen kao niz, odnosno A' je prebrojiv.

(b) Svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup. Zaista, akoje X beskonačan skup tada je on neprazan i postoje elementi $a_1 \in X$ i $b_1 \in X$, $a_1 \neq b_1$. Dalje u skupu $X \setminus \{a_1, b_1\}$ postoji a_2, a u skupu $A \setminus \{a_1, b_1, a_2\}$ postoji b_2. Ponavaljajući postupak dobijamo dva niza, odnosno dva diisjunktna prebrojiva podskupa $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ skupa X.

(c) Unija konačnog ili prebrojivog broja končnih ili prebrojivih skupova je konačan ili prebrojiv skup. Dokaz prvo izvodimo za slučaj kada su skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Označimo sa P_n skup $n-$tih stepena prostih brojeva. Skupovi $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ su prebrojivi i u parovima disjunktni. Pošto su svi A_i konačni ili prebrojivi, postoje bijekcije $f_i : P_i \to A_i, i = 1, 2, \ldots$ Ali time je konstruisana bijekcija dijela skupa prirodnih brojeva i skupa A, što znači da je A konačan ili prebrojiv skup.

Uočimo da ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ zapisani kao nizovi:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

tada se njihova unija A može zapistai kao niz:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots$$

Za dva skupa A i B postoje sljedeće mogućnosti:

(i) Postoji bijekcija $f : A \to B$. Tada je $A \sim B$ i pišemo $|A| = |B|$;

(ii) Postoji bijekcija $f : A \to B_1$, gdje je $B_1 \subseteq B, B_1 \neq B$. Tada pišemo $|A| \leq |B|$.

(iii) Postoji bijekcija $f : A \to B_1$, gdje je $B_1 \subseteq B, B_1 \neq B$, ali ne postoji bijekcija $g : A \to B$. Tada pišemo $|A| < |B|$.

(iv) Postoje bijekcije $f : A \to B_1$ i $g : B \to A_1$, pri čemu $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B, A \neq A_1, B \neq B_1$. Tada je dakle $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$.

(v) Ne postoji bijekcija $f : A \to B_1, B_1 \subseteq B$ niti postoji bijekcija $g : B \to A_1, A1 \subseteq B$

Primjenom tzv. aksiome izbora, dokazuje se da je slučaj (v) nije moguć. Za konačne skupove, nemoguć je i slučaj (iv) kada se se radi o pravim podskupovima $B_1 \subset B$ i $A_1 \subset A$.

U vezi sa slučajem (iv) važi sljedeća teorema:

Teorema (Kantor-Bernštajn-ova teorema) Ako je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$ tada je $|A| = |B|$.

Drugim riječima, ako postoje injekcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$, tada postoji bijekcija $h : A \to B$. Poznato je više dokaza ove teoreme. Prezentiramo jedan od njih **(učenicima: samo formulcija teoreme; dokaz izostaviti)**

Dokaz. Neka su $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto A$ injekcije. Ideja je da se modifikuje funkcija f da bude sirjekcija. Prvo je redefinišemo na slici $g(B)$, tako da ovde bude inverzija g. Naravno, ovo može narušiti injektivnost, pa ćemo to raditi iterativno, tako što ćemo smanjivati skupove na kojima se pravi redefinicija, beskonačno dugo, dok ne postignemo cilj. Dakle, prvo imamo $C_0 = A \setminus g(B)$, a zatim uočavamo da elementi skupa $f(C_0)$ imaju dva originala, jedan za f, a drugi za g^{-1}. Zato ostavljamo da je f nepromijenjeno na $C_0 \cup C_1, C_1 = g(f(C_0))$

Precizno, $C_0 = A \setminus g(B), C_{n+1} = g(f(C_n))$ i $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$. Postavimo $h(a) = f(a)$, ako $a \in C$ i $h(a) = g^{-1}(a)$ ako $a \notin C$. Tada je h dobro definisana funkcija i h je bijekcija. Provjera

(1) Sirjektivnost: Ako je $b \in B$, tada razlikujemo dvije moguńosti:

(1a) ako je $b \in f(C)$, tada je $b = f(a), a \in C$, pa je $h(a) = f(a) = b$. Ako $a \notin f(C)$ tada posmatramo $a := g(b)$. Prema definiciji C_0, $a \notin C_0$. Pošto je $f(C_n) \subseteq f(C)$, to $b \notin f(C_n) = C_{n+1}$, ni za jedno n. Dakle, $a \notin C$, pa je $h(a) = g^{-1}(a) = b$.

(1b) Injektivnost. Pošto su f i g^{-1} injekcije, dovoljno je dokazati da nije moguća jednakost $f(c) = g^{-1}(a)$, za neko $c \in C$ i $a \in A \setminus C$. Pošto $c \in C$, postoji $n \geq 0$, takvo da je $c \in C_n$. Dakle, $g(f(c) \in C_{n+1}$ pa dakle i u C. Odavde slijedi $g(f(c) = g(g^{-1}(a)) = a$ nije u C. Kontradikcija.

Dokaz 2. Bez gubljenja opštosti, pretpostavljamo da su A i B disjunktni. Za svako $a \in A$ (ili slično za svako $b \in B$), možemo formirati jedinstven dvostrani niz

$$\cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a) \to \cdots$$

Za svako a, ovaj niz može da se završi lijevoj strani kada f^{-1} ili g^{-1} nije definisano. Ovi nizovi formiraju particiju unije $A \cup B$. To omogućava da se definiše bijekcija izmedju elemenata skupova A i B u svakom nizu posebno, na sljedeći način:

Kažemo da je niz A-stoper ako on završava u skupu A ili B-stoper ako završava u skupu B. U protivnom, niz je duplo-beskonačan ako su mu svi elementi različiti ili ciklički ako ima ponavljanja. U prvom slučaju (kada je niz $A-$stoper, f je tražena bijekcija, u drugom slučaju (kada je niz B-stoper, to je preslikavanje g,a u tre̛ cem (duplo beskonačnog ili cikličnog niza) bilo koje od preslikavanja f ili g je bijekcija.

Drugačija formulacija Kantor-Bernštajnove teoreme: Ako su $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto A$ injekcije, tada postoje particije $A_1, A_2 \subseteq A$ i $B_1, B_2 \subseteq B$, takve da je $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

Torema. (Kantorova teorema) Ako je X proizvoljan skup, tada je $|X| < |\mathcal{P}(\mathcal{X})|$.

Dokaz. Jasno je da je $cardX \leq card\mathcal{P}(X)$, jer je preslikavanje koje svakom eleementu x skupa X pridružuje jednočlan podskup $\{x\}$ injekcija sa X na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Ako bi postojala bijekcija $f : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{X})$, tada uočavamo skup $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ i postavljamo pitanje: za koje $a \in X$ je $f(a) = A$, tj. da li takvo a pripada skupu A; dobija se da nijedna alternativa $a \in A$ i $a \notin A$ nije moguća. Naime, ako $a \in A$, tada po definiciji skupa A, imamo da $a \notin f(a) = A$; ako pak $a \notin A$ tada, opet po definiciji skupa A slijedi da je $a \in f(a) = A$. Dakle, nijedna od dvije alternative nije moguća pa dakle ne postoji $a \in X$ takvo da je $A = f(a)$, što znači da f nije bijekcija, odnosno da bijekcija $f : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ne postoji. Dakle, $|X| < |\mathcal{P}(\mathcal{X})|$.

Primijetimo da kada se Kantorova teorema primijeni na konačni $n-$elementni skup, dobija se da je $n < 2^n$ za svaki prirodan broj n.

Ako se teorema primijeni na neki prebrojiv skup, recimo na skup prirodnih brojeva, tada dobijamo da je skup svih podskupova skupa prirodnih brojeva veće kardinalnosti od skupa prirodnih brojeva.

Za beskonačni skup koji nije prebrojiv, kažemo da je neprebrojiv.

Primjer 20. Skup $(0, 1)$ svih realnih brojeva izmedju 0 i 1 je neprebrojiv. Za dokaz ćemo koristiti mogućnost predstavljanja realnih brojeva u obliku beskonačnih decinalnih razlomaka. Pretpostavimo dakle da je skup $[0, 1]$ prebrojiv. Tada bismo taj skup mogli napisati u obliku niza:

$$x_1 = 0.\alpha_{11}\alpha_{12} \cdots \alpha_{1m} \cdots$$

$$x_2 = 0.\alpha_{21}\alpha_{22} \cdots \alpha_{2m} \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2} \cdots \alpha_{nm} \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Medjutim broj $b = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_n \cdots$, gdje je $\beta_k \neq \alpha_{kk}$ razlikuje se od svakog od brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (od x_1 na prvoj decimali, od x_2 na drugoj, ..., od x_k na $k-toj$ decimali, pripada odsječku $[0, 1]$. Dakle, nije moguće predstaviti skup $(0, 1)$ u obliku niza, tj. taj skup nije prebrojiv.

Kažemo da je moć (kardinalni broj) skupa $(0,1)$ kontinum, i taj kardinalni broj se označava sa c. Dakle $card(0,1) = c$.

Primjer 21. (a) Ako je X beskonačan skup i $A \subseteq X$ konačan ili prebrojiv skup, tada je $X \setminus A \sim X$. Zaista, ako je X neprebrojiv skup i $A \subseteq X$ konačan ili prebrojiv skup, tada je skup $X \setminus A$ neprebrojiv skup (u protivnom bi unija $A \cup (X \setminus A) = X$ dva prebrojiva ili jednog prebrojivog i jednog končnog skupa bila prebrojiv skup, a skup X nije prebrojiv). Iz $A \setminus X$ moguće je izdvojiti prebrojiv skup $B \subseteq X \setminus A$. Neka je $C = (X \setminus A) \setminus B$. Tada je $X = (A \cup B) \cup C$ i $X \setminus A = (A \cup B) \cup C$. Preslikavanje f definisano kao proizvoljna bijekcija prebrojivih skupova B i $A \cup B$ i kao identitet na C je bijekcija skupova X i $X \setminus A$.

(b) Unija beskonačnog skupa A i prebrojivog ili konačnog skupa B je skup iste kardinalnosti kao skup A. Ako je A konačan ili prebrojiv skup, tada je ovo tvrdjenje dokazano u prethodnim primjerima. Ako je skup A neprebrojiv tada je $A \cup B$ neprebrojiv skup, pa su prema Primjeru 19, skupovi $A \cup B$ i $A = (A \cup B) \setminus B$ iste kardinalnosti.

(c) Svaki beskonačan skup X sadrži pravi podskup iste kardinalnosti kao skup X. U Primjeru 19 (c) dokazali smo da beskonačan skup X sadrži dva disjunktna prebrojiva podskupa. Ako je jedan od njih ozněen sa A, tada je $X \setminus A \sim X$, a $X \setminus A$ je pravi podskup skupa A.

(d) Skup uredjenih parova prirodnih brojeva je prebrojiv. Zaista, preslikavanje koje paru prirodnih brojeva (m,n) pridružuje prirodan broj $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$ je bijekcija skupova $N \times N$ i N. Poistvjetimo par (m,n) sa razlomkom $\frac{m}{n}$ i zaključujemo da je skup svih pozitivnih racionalnih brojeva prebrojiv, a zatim, redjajući naizmenično pozitivne i negativne racionalne brojeve i počevši brojem 0, dobijamo skup racionalnih brojeva napisan u obliku niza, što znači da je taja skup prebrojiv. Dakle, $N \times N \sim N$. Slično, ako je A prebrojiv skup, tada je $A \times A$ prebrojiv skup.

(e) Posmatrajući tačke $n-$dimenzionog prostora kao uredjene $n-$torke, zakjučujemo da je skup svih tačaka prostora R^n sa racionalnim koordinatama prebrojiv, a zatim i da je skup svih polinoma sa racionalnim koordinatama prebrojiv. Dalje, pošto svaki polinom može imati konačno mnogo nula, slijedi da je broj nula polinoma sa racionalnim koeficijentima (nule polinoma sa racionalnm koeficijentima su *algebarski brojevi*), slijedi da je skup algebarskih brojeva prebrojiv. Brojeve koj nisu algeberski zovemo transcedentnim. PoEsv sto je skup svih realnih brojeva neprebrojiv, slijedi da je skup transcedentnih brojeva neprebrojiv.

Primjer 22. (a) Ako su $X = [a,b], a < b$ i $Y = [c,d], c < d$ dvije duži, tada je $cardX = cardY$. Odgovarajuća bijekcija (jedna od mnogo mogućih) može se opisati geometrijski. Ako su dužine ovih duži jednake, tada se one translacijom i eventualnom rotacijom mogu dovesti do poklapanja. Translacija i rotacija su bijekcije, pa je i njihova kompozicija bijekcija. Ako su one različite dužine, tada se kretanjem one mogu dovesti tako da budu paralelne. Označimo središte prve od njih sa S_1 a druge sa S_2, a njihove krajnje tačke sa A i B odnosno sa C i D. Presjek pravih AC i BD označimo sa S. Tada tačke S_1, S, S_2 leže na istoj pravoj (skicirati sliku). Svaka prava koja prolazi kro tačku S i neku tačku M sa duži X siječe duž Y u nekoj tački N. Postavimo $f(M) = N$. Preaslikavanje $f : X \to Y$ je bijekcija, dakle $[a,b] \sim [c,d]$.

Bijekciju smo mogli opisati i posmatrajući sve u koordinatnoj ravni.

Funkcija $f : [a,b] \to [c,d]$, $f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$ (jednačina prave kroz tačke (a,c) i

$(b, d))$ je bijekcija skupova $[a, b]$ i $[c, d]$. Isto preslikavanje realizuje bijekciju skupova (a, b) i (c, d). Dakle, $(a, b) \sim (c, d)$ i za $a < b$ je $card(a, b) = c$.

(b) Ekvipotentnost segmenta $[a, b]$ i intervala (a, b) meže se dokazati primjenom Kantro-Bernštajnove teoreme. Naime imamo da je $[a, b] \sim [a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3}] \subseteq (a, b)$ i $(a, b) \sim (a, b) \subseteq [a, b]$. Odavde, prema Kantor-Bernštajnovoj teoremi slijedi $[a, b] \sim (a, b)$. Ukupno, iz ovih razmatranja slijedi da svi interavli i svi segementi na pravoj imaju isti kardinalni broj, i da je za svaklo $a < b$, $card(a, b) = card[a, b] = c$.

(c) Jedna bijekcija skupova $[0, 1]$ i $(0, 1)$ je preslikavanje $f : (0, 1) \to [0, 1]$ takvo da je $f(x) = x$ za $x \in (0, 1) \setminus \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$, $f(1/2) = 0$, $f(1/3) = 1$ i $f(1/(n + 2)) = 1/n$ za $n \geq 2$. Očigledno je da je ovo bijekcija, jer različite elemente iz $(0, 1)$ slika u različite brojeva iz $[0, 1]$, a za svako $z \in [0, 1]$ postoji $x \in (0, 1)$ takvo da je $f(x) = z$.

Primjer 22a. Ako su k_1 i k_2 kružnice poluprečnika r_1 i r_2, $r_1 \neq r_2$, tada možemo geometrijski opisati bijekciju $f : k_1 \to k_2$ na sljedeći način: Zamislimo pravi konus i pretpostavimo da su k_1 i k_2 presjeci tog konusa ravnima koje su normalne na osu konusa. Tada je preslikavanje $f : k_1 \to k_2$ koje svakoj tački $A \in k_1$ pridružuje tačku B presjeka prave SA i kružnice k_2. Preslikavanje f je očigedno bijekcija. Na sličan način može se uspostaviti bijekcija krugova ograničenih kružnicama k_1 i k_2. Dakle, $cardk_1 = cardk_2$

S duge strane, preslikavanje $g : [0, 2\pi) \to R^2$ definisano sa $[0, 2\pi) \ni t \to g(t) = (r_1 \cos t, r_1 \sin t)$ je bijekcija sa $[0, 2\pi)$ na k_1. Dakle, $cardk_1 = card[0, 2\pi) = c$

Primjer 23. (a) Ako svakom podskupu datog skupa X pridružimo njegovu karakterističnu funkciju, i skup svih karakterističnih funkcija označimo sa $K(X)$ tada je opisano preslikavanje bijekcija, pa je dakle $card\mathcal{P}(\mathcal{X}) = cardK(X)$. Očigledno je da je $K(X)$ skup svih funkcija koje slikaju X u skup $\{0, 1\}$. Naime, svakom skupu $A \subseteq X$ odgovara njegova karakteristična funkcija k_A i ona slika skup X u skup $\{0, 1\}$ i proizvoljnoj funkciji f koja slika X u $\{0, 1\}$ pridržujemo skup $A_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Tada je f karakteristična funkcija skupa A_f. Dakle, skup $K(X)$ je zapravo skup funkcija $f : X \to \{0, 1\}$. Kako se skup funkcija $f : X \to Y$ označava sa Y^X to skup svih karateristističnih funkcija podskupova skupa X pa dakle i skup svih podskupova skupa X možemo označiti sa $\{0, 1\}^X$. a pošto u našim razmatranjima umjesto $\{0, 1\}$ može da stoji bilo koji dvoelementni skup, za partitivni skup skupa X koristimo i oznaku 2^X.

Primjer 23a. Dokazaćemo da je $2^{\aleph_0} = c$, tj da je kardinalni broj skupa svih podskupova skupa prirodnih brojeva (odnosno bili kojeg prebrojivog skupa) jednak c. Posmatrajmo preslikavanje $f : A \to (0, 1)$ gdje za beskonačni skup $A \subseteq N$, postavljamo $f(A) = (0.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k \cdots)_2$, gdje je $\alpha_i = 1$ ako $i \in A$ i $\alpha_i = 0$ ako $i \notin A$. Recimo $f(\{1, 3, 5, 7....\}) = (0.101010\ldots)_2$, $f(\{2, 4, 6, \ldots\}) = (0.0101010101....)_2 \in (0.1)$. To preslikavanje je bijekcija, pa je kardinalni broj skupa beskonačnih podskupova skupa prirodnih brojeva jednak c. Ako se tom skup doda skup konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva N, koji je prebrojiv, dobija se skup iste kardinalnosti, što znači da je $card(2^N) = c$, odnosno $2^{\aleph_0} = c$.

Primjer 24.(za samostalni rad) (a) Kardinalni broj skupa realnih brojeva jednak je c. Zaista, preslikavanje $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ je bijekcija skupa realnih brojeva i intervala $(-1, 1)$.

Primjer 25. (za samostalni rad) Tački $A(0.x_1x_2 \ldots x_n \ldots, 0.y_1y_2 \ldots y_n \ldots)$ iz jediničnog kvadrata $(0, 1] \times (0, 1]$ pridružujemo broj $0.x_1y_1 \ldots x_ny_n \ldots$. Ovo preslikavanje je bijekcija, pa je $card((0,1) \times (0,1)) = card(0,1) = c$.

Primjer 26. (za samostalni rad) Skup svih podskupova skupa prirodnih brojeva je iste kardinalnosti kao skup nizova (x_n), gdje je $x_n = 0$ ili 1. Kao što je to radjeno u ranijim primjerima, nizu $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ prodružujemo skup kojise sastoji od takvih prirodnih brojeva n za koje je $a_n = 1$. Recimo nizu $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$ pridružujemo skup $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$.. Ovako definisano preslikavanje je očigledno bijekcija.

Primjer 27. (za samostalni rad) Dokazaćemo da je skup K krugova u ravni koji su u parovima disjunktni je prebojiv. U tom cilju primijetimo da svaki krug sadrži bar jednu tačku sa racionalnim koordinatama. Kako su krugovi u parovima disjunktni, te tačke sa racionalnim koordinatama su različite. Dakle, $cardK \leq cardQ = \aleph_0$. S druge strane, skup krugova sa centrima u tačkama sa cjelobrojnim koordinatama i polupre čnicima $r < 1/2$ je prebrojiv,p ja dakle $cardK = \aleph_0$.

4 Kratko o paradoksalnim razlaganjima u geometriji.

Kako smo ranije nagovijestili, kratko ćemo se pozabaviti tzv. paradoksalnim razlaganja geometrijskih figura i tijela, koji se mogu razumjeti kao refleksije u geometriji paradoksa beskonačnosti.

Prvo dajemo samo jednu varijantu Kantor-Bernštajnove teoreme

Teorema (Kantor-Bernštajn) Ako si $f : A \to B$ i $g :_B\to A$ injekcije tada postoje razlaganja skupova $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$ i $B = B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2 = \emptyset$. takva da je $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

Ova teorema ima čudne posljedice. Na primjer, akoje C krug a Q kvadrat, tada prema ovoj teoremi postoje razlaganja $C = C_1 \cup C_2$ i $Q = Q_1 \cup Q_2$ takv a da je C_1 homotetično sa Q_1 a Q_2 k+homotetično sa C_2. (nacrtati sliku jedan kvadrat$Q$ i jedan krug C, zatim u krugu C kvadrat $Q' = f(Q)$ sličan sa Q i u kvadratu Q krug $C' = g(C)$ i primjeniti teoremu.

Navedimo još jedan primjer paradoksalnog razlaganja.

Primjer 28.(Serpinski, Mazurkijevič-poljski matematičari, 1914.g.) Označimo sa P skup svih polinoma sa nenegativnim koeficijintima i neka je c transcedentan kompleksan broj, takav da je $|c| = 1$. Neka je sada $A = \{p(c) : p \in P\}$. Posmatramo skupove $A_1 = A + 1$ (to je skup koji se dobija translacijom skupa A) i $A_2 = cA$, (to je skup koji se dobija rotacijom skupa A za ugao $\arg c$, što slijedi iz geometrijske interpretacije množenja kompleksnih brojeva). Tada je $A_1 \subseteq A$ (zaista, ako $z \in A_1$ tada je $z = z_1 + 1$, gdje je $z_1 = p_1(c), \in A$, $p_1 \in P$. No tada je za $p(x) = p_1(x) + 1$ takodje polinom iz P (koeficijenti su cjelobrojni) i pri tome je $p(c) = p_1(c) + 1 = z_1 + 1 = z \in A$, što znači da je $A_1 \subseteq A$;) i $A_2 \subseteq A$ (iz $z \in A_2$ slijedi da je $z = cz_2$, gdje je $z_2 = p_2(c) \in A$, pa kako polinom $p(x) = xp_2(x) \in P$, i kako je $p(c) = cp_2(c) \in A$, slijedi da je $A_2 \subseteq A$.

Dokažimo joǐ inkluziju $A \subseteq A_1 \cup A_2$. U tom cilju primjetimo da ako $z \in A$, tada je $z = p(c)$. Ako je slobodni član polinoma $p(x) \in P$ pozitivan, tada polinom $q(x) = p(x) - 1$ ima nenegativne cjelobrojne koeficijenta, pa pripada klasi P polinoma. Pri tome $q(c) \in A$, pa $z = p(c) = q(c) + 1 \in A_1$. Ako je pak slobodni član polinoma $p(x)$ nula, tada je

$q(x) = p(x)/x$ polinom sa nenegativnim cjelobrojnim koeficijentima, pa $q \in P$. Slijedi da $q(c) \in A$, pa $z = p(c) = cq(c) \in A_2$.

Ukupno imamo da je $A = A_1 \cup A_2$. Dokažimo da je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno da postoji $z \in A_1 \cap A_2$. Tada je $z = z_1 + 1, z = cz_2$, pa postoje polinomi $p_1, p_2 \in P$, takvi da je $cp_2(z) = p_1(c) + 1$. To znači da je c nula polinoma $q(x) = xp_2(x) - p_1(x) - 1$. Pošto je c transcedentan broj, dakle nije korijen polinimijane jednčine sa cijelim koeficijentima, slijedi da je gornja jednakost moguća jedino ako je $q(x)$ nula polinoma tj. ako i samo ako je $xp_2(x) - 1 = p_1(x)$, ali polinom na lijevoj strani ove jednakosti ima slobodni član jednak -1, a koeficijenti u polinomu na desnoj strani su cjelobrojni i nenegativni. Kontradikcija, pa dakle ne postji $z \in A_1 \cap A_2$.

U ovim primjeru imamo paradokslano razlaganje skupa A na dva njemu kongruentna skupa, (jedan dobijen translacijom a drugi rotacijom skupa A) koji pri tom nemaju zajedničkih tačaka.

Na kraju, posebno interesovanje u matematici izazvalo je otkriće tzv. paradokslanog razlaganja lopte, preme kojem se lopta poluprečnika $r > 0$ može razložiti na konačan broj djelova, od kojih se kretanjem, mogu formirati dvije lopte obje poluprečnika r. Takav rezultat je dobijen korišćenjem tzv, aksiome izbora, prema kojoj se iz proizvoljne familije skupova može formirati skup koji sadrži tačno po jedan element iz svakog skupa date familije. Ovakav rezultat je uzdrmao status aksiome izbora i uz mnoga tvrdjenja u matematici se kaže da se ona mogu dokazati samo korišćenjem aksime izbora. U svakom slučaju razmatranja vezana za ovaj primjer paradoksalnog razlaganja daleko prevazilaze nivi i ciljeve ovog materijala, tu temu ostavljamo za drugu priliku.