КОМБИНАЦИЈЕ И ПЕРМУТАЦИЈЕ

СКУПА И МУЛТИСКУПА

- неуређени и уређени избори елемената -

Жана Ковијанић Вукићевић

Природно-математички факултет, Универзитет Црне Горе

е-адресе: zanak@rc.pmf.ac.me, zanak@t-com.me

Сви смо се много пута до сада срели са проблемима у којима је било потребно одредити број конфигурација са одређеним особинама. Редослијед елемената у тим конфигурацијама некада је био битан, а некада не. На примјер, ако из групе од 30 ученика једног одјељења треба изабрати трочлану делегацију, редослијед ученика није битан, али за одређивање броја различитих регистарских таблица чија прва два симбола су слова неке фиксиране азбуке а сљедећа 3 цифре редослијед је, наравно, битан. У првом случају ријеч је о неуређеним изборима елемената – комбинацијама, а у другом о уређеним изборима –пермутацијама.

Дефиниција 1. *Нека је S скуп и $k \in N_0$ ненегативан цио број. k-комбинација скупа S је сваки k-подскуп скупа S.*

Скуп свих k-комбинација, то јесте k-подскупова скупа S, означавамо са $\binom{S}{k}$ или $\mathcal{P}_k(S)$. Број k-комбинација скупа од n елемената означавамо са $\binom{n}{k}$ или $C(n,k)$. Додатно, дефинишемо $\binom{0}{0}=1$. Ако је $k>n$, из дефиниције броја $\binom{n}{k}$ је јасно да важи $\binom{n}{k}=0$

Дефиниција 2. *Нека је S скуп и $k \in N$.*

- *k-пермутација без понављања скупа S је свака уређена k-торка различитих елемената скупа S.*
- *k-пермутација са понављањем скупа S је свака уређена k-торка не обавезно различитих елемената скупа S.*

У старијој литератури k-пермутације n-скупа често се називају и варијацијама k-те класе скупа од n елемената. Када није посебно наглашено о којим се пермутацојама ради, под појмом k-пермутација се подразумијева k-пермутација без понављања. n-пермутације скупа од n елемената зовемо (само) пермутацијама тог скупа. Број k-пермутацијама скупа од n елемената означавамо са $P(n,k)$, а k-пермутацијама са понављањем са $\overline{P}(n,k)$. Важи сљедеће тврђење:

Теорема 1.

(1) $P(n,k)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, за свако $k,n\in N$, $k\le n$,

(2) $\overline{P}(n,k) = n^k$, за свако $k,n\in N$,

(1) $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, за свако $k,n\in N$, $k\le n$.

<u>напомена:</u>

- Производ првих n природних бројева $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ означавамо са $n!$ и читамо n -факторијел.
- $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ је опадајући n факторијел дужине k кога ћемо означавати са $(n)_k$.

Доказ: (1) и (2) слиједе непосредно из принципа производа. Докажимо (3). Нека је $C(n,k)=h$ и нека су $B_1,B_2,\ldots,B_h$ сви k -подскупови n -скупа S . Означимо са $\mathcal{A}$ фамилију свих k-пермутација скупа S . За свако $i=\overline{1,h}$ нека је A_i фамилија свих пермутација k -скупа B_i . Тада је

$$\mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h,\ A_i \cap A_j = \emptyset, \mathrm{i} \neq \mathrm{j}.$$

па је на основу принципа суме $|\mathcal{A}| = |A_1| + |A_2| + \ldots |A_h|$, то јесте $(n)_k = h\cdot k!$. Одавде слиједи једнакост (3).

□

Примјер 1. Доказати да је $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, за све $n,k\in N_0,\ k\le n$.

Рјешење:

I начин: алгебарски, коришћењем $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,

II начин: комбинаторно. Ако је A скуп он n елемената и $\mathcal{P}_k(A)$, $\mathcal{P}_{n-k}(A)$ фамилије његових подскупова кардиналности k и $n-k$, редом, пресликавање $f:\mathcal{P}_k(A)\to\mathcal{P}_{n-k}(A)$ дефинисано са $f(X)=X^c$ за свако $X\in\mathcal{P}_k(A)$ је бијекција. Из принципа једнакости слиједи $|\mathcal{P}_k(A)|=|\mathcal{P}_{n-k}(A)|$, односно $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

□

<u>напомена:</u> симболи $\binom{n}{k}$ се називају биномним коефицијентима, а особина изражена у горњем примјеру особином симетрије. Сва тврђења и идентитети са биномним коефицијентима могу се доказивати алгебарски, када их посматрамо као алгебарске изразе $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, и комбинаторно, када $\binom{n}{k}$ посматрамо као број к-подскупова скупа од n елемената. Биномни коефицијенти су добили име по формули за развој бинома (биномној формули) у којој се појављују као коефицијенти. Биномна формула је један од најважнијух алгебарско-комбинаторних резултата а њен најједноставнији облик $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ датира и прије Еуклида, око 300 г. прије нове

ере. Око 1676. године Исак Њутн је први коректно доказао формулу за $(x+y)^n$, $n\in N$, иако је она у неком смислу и прије била позната. Осим што је дао коректан доказ, Њутн је формулу и уопштио развивши у степени ред функцију $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$.

Примјер 2. (Биномна формула) За свако $n\in N_0$ и свако $x, y\in R$ (важи и за све $x, y\in C$) важи једнакост

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}.,$$

Рјешење: $(x+y)^n=(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$. Послије изведених множења, односно „ослобађањем" од заграда, добијамо збир монома облика $x^k y^{n-k}$. Остаје да „средимо" израз, односно нађемо колико се пута један исти моном појављује у овој суми. За свако фиксирано k то је у ствари број начина да од n „заграда" , односно фактора облика $(x+y)$, изаберемо њих тачно k из којих ћемо „извући" сабирак x. То можемо урадити на $\binom{n}{k}$ начина.

□

Примјер 3. (Полиномијална формула) За $n,k\in N$ и било које реалне (или комплексне) бројеве $a_1,a_2,\ldots,a_k$ важи једнакост

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\in N_0}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k},$$

гдје је $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Сумирање се врши по свим уређеним k-торкама $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ ненегативних цијелих бројева чија је сума једнака n.

Рјешење: Доказ је сличан доказу из претходног примјера. Наиме,

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=(a_1+a_2+\ldots+a_k)\cdot\ldots\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k),$$

па „ослобађањем" од заграда добијамо збир монома облика $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}$. Остаје да „средимо" израз, односно нађемо колико се пута један исти моном појављује у овој суми. За сваку фиксирану k-торку $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ то је у ствари број начина да од n „заграда" , односно фактора облика $(a_1+a_2+\ldots+a_k)$, изаберемо прво њих тачно n_1 из којих ћемо „извући" сабирак a_1. Број могућих избора n_1 „заграда" од укупно n, на које ћемо поставити елемент a_1, је $\binom{n}{n_1}$. Затим, за избор

n_2 „заграда", од преосталих $n-n_1$, из којих ћемо „извући" сабирак a_2 је $\binom{n-n_1}{n_2}$,

.... и т.д. На основу принципа производа,

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-\ldots n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

□

Покушајмо сада да одговоримо на сљедеће питање: На колико начина Марко, Коле и Оги могу међу собом распоредити 8 јабука?
Ако Марку дамо 2, Колету 3 и Огију 3 јабуке то можемо записати у облику „скупа" у коме се елементи могу понављати

{Марко, Марко, Коле, Коле, Коле, Оги, Оги, Оги}

Ово је један примјер 8-комбинације са понављањем 3-скупа {Марко, Коле, Оги}.

Формални приступ овом проблему изводи се из појма мултискупа. Интуитивно, мултискуп је скуп у коме је дозвољено понављање елемената.

Дефиниција 3. Н*ека је* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *скуп од* n елемената. Мултискуп над A *је уређени пар* $M=(A,m)$ *гдје је* $m:A\to N_0\cup\{+\infty\}$ *функција над* A*, што обично записујемо као* $M=\left\{a_1^{m(a_1)},a_2^{m(a_2)},\ldots,a_n^{m(a_n)}\right\}$.

За свако $a\in A$, $m(a)$ је вишеструкост елемента a у мултискупу M. Ако је $\sum_{a\in A}m(a)$ коначан број, то јесте ако су све вишестуркости коначне, користимо и запис $M=\left\{\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{m(a_1)},\underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{m(a_2)},\ldots,\underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{m(a_n)}\right\}$. У том случају, М је коначан мултискуп кардиналности $\sum_{a\in A}m(a)$.

Примјер: {Марко, Марко, Коле, Коле, Коле, Оги, Оги, Оги} је исто што и {Марко^2, Коле^3, Оги^3} и то је мултискуп кардиналности 8.

Из дефиниције мултискупа и дефиниције k-пермутација са понављањем слиједи да су k-пермутације са понављањем скупа $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ исто што и k-пермутације мултискупа $M=\left\{a_1^{\infty},a_2^{\infty},\ldots,a_n^{\infty}\right\}$.

Увођење појма мултискупа омогућава нам да дефинишемо и појам комбинација са понављањем:

Дефиниција 4. *Нека је* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *скуп и* $k\in N_0$ *ненегативан цио број.* k *-комбинација са понављањем скупа* A *је сваки* k *-елементни мултискуп над* A.

Број свих k -комбинација са понављањем скупа A означавамо са $\overline{C}(n,k)$.

Теорема 2. $\overline{C}(n,k)=\binom{n+k-1}{k}$

Доказ: Нека је $M=\left\{a_1^{m(a_1)},a_2^{m(a_2)},\ldots,a_n^{m(a_n)}\right\}$ једна k -комбинација са понављањем скупа A. Тада је $m(a_1)+\ldots+m(a_n)=k$. Придружимо овој комбинацији сљедећи (0,1)-низ дужине $n+k-1$ са тачно k јединица и тачно $n-1$ нула:

$$\underbrace{1,1,\ldots 1}_{m(a_1)},0,\underbrace{1,1,\ldots 1}_{m(a_2)},0,\ldots,\underbrace{1,1,\ldots 1}_{m(a_n)}$$

Овако дефинисано пресликавање скупа свих k -комбинација са понављањем скупа A у скуп свих (0,1)-низова дужине $n+k-1$ са тачно k јединица и тачно $n-1$ нула је бијекција. Према принципу једнакости, број $\overline{C}(n,k)$ тада је једнак броју (0,1)-низова дужине $n+k-1$ са тачно k јединица и тачно $n-1$ нула, а то је $\binom{n+k-1}{k}$.

(Број могућих избора k позиција, од укупно $n+k-1$, на које ћемо поставити цифру 1).

□

Примјер 4: Колико рјешења у скупу $N_0\times N_0\times N_0\times\ldots\times N_0$ има једначина $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$?

рјешење: Успоставити бијекцију између фамилије рјешења ове једначине и k -комбинација мултискупа $M=\left\{a_1^{\infty},a_2^{\infty},\ldots,a_n^{\infty}\right\}$, то јесте k -комбинација са понављањем скупа $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, или, ако вам је лакше, (0,1)-низова дужине $n+k-1$ са тачно k јединица.

Одговор: $\binom{n+k-1}{k}$ или $\binom{n+k-1}{n-1}$.

□

Примјер 5: Колико рјешења има једначина $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$, $x_i\in N,\ i=\overline{1,n}.$

рјешење: Успоставити бијекцију између фамилије рјешења ове једначине и фамилије рјешења ове једначине $x_1+\ldots+x_n=k-n,\quad x_i\in N_0, i=\overline{1,n}.$ На основу принципа једнакости и примјера 1, добјамо одговор $\binom{k-1}{n-1}$

□

Теорема 3. Нека је М фамилија од n објеката k различитих типова: n_1 објеката типа a_1, n_2 објеката типа a_2, ..., n_k објеката типа a_k, гдје су $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$ тако да важи $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Број пермутација мултискупа $M = \left\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_k^{n_k}\right\}$ је $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

Доказ: Пермутације мултискупа $M = \left\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_k^{n_k}\right\}$ су уређене n-торке скупа $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ у којима се a_i појављују тачно n_i пута, за свако $i = \overline{1,k}$. Питање је: колико има оваквих n-торки?

Број могућих избора n_1 позиција, од укупно n, на које ћемо поставити елемент a_1 је $\binom{n}{n_1}$. За избор n_2 позиција, од преосталих $n - n_1$, на које ћемо поставити елемент a_2 је $\binom{n-n_1}{n_2}$, ... и т.д. На основу принципа производа,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-\ldots n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

□

Сљедећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 4. Нека су $n \geq 1$, $k \geq 0$, , $v \geq -1$ цијели бројеви. Број уређених k-торки $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ скупа $N_n = \{1, 2, \ldots n\}$ за које је $a_{j+1} - a_j > v$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, је

$$f_v(n,k) = \binom{n-(k-1)v}{k}, \text{ за } n \geq (k-1)v.$$

Посљедица: Нека су $k, n, v \in N_0$, $n \geq (k-1)v$. Број k-подскупова $S \subseteq [n]$, таквих да је за све $x, y \in S$, $x \neq y$, $|x - y| > v$, једнак је $f_v(n,k) = \binom{n-(k-1)v}{k}$.

ЗАДАЦИ

1. Сваки од четворице дјечака бира једну од 6 дјевојака за плес. На колико се то начуна може учинити:

Рјешење: „Нумеришимо" дјевојке бројевима 1,2,...,6. Тада је „плесна комбинација" уређена 4-торка (x_1, x_2, x_3, x_4), гдје је x_i име (изражено бројем) дјевојке са којом плеше i-ти дјечак. Одговор: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

□

2. Колико дијагонала има конвексни n-тоугао?

Рјешење: Број дужи чије су крајње тачке тјемена n-тоугла је $\binom{n}{2}$. Међу њима је n страница, а преосталих $\binom{n}{2} - n$ су дијагонале.

напомена: Нагласити ученицима да је n-тоугао $\mathcal{K}$ конвексан ако важи: За ма које двије тачке $A, B \in \mathcal{K}$ дуж $\overline{AB}$ је у $\mathcal{K}$. С тога је претпоставка о конвексности битна.

□

3. Колико има строго растућих а колико неопадајућих низова дужине k чији су чланови из $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Рјешење: Када k-подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ поређамо у растући низ, што и јесте уобичајен начин којим записујемо скупове чији су елементи бројеви, добијамо растућих низова дужине k. Из принципа једнакости и слиједи да има $\binom{n}{k}$ строго растућих низова дужине k.
Када k-мултискуп над $\{1, 2, \ldots, n\}$, т.ј. k-комбинацију са понављањем скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ поређамо од најмањег ка највећем, што и јесте уобичајен начин којим записујемо скупове чији су елементи бројеви, добијамо неопадајући низов дужине k. Из принципа једнакости и слиједи да има $\overline{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$ неопадајућих низова дужине k.

□

4. На колико начина 30 једнаких свесака можемо распоредити на 5 ученика тако да свако дијете добије по бар једну свеску?

Рјешење: Нека је x_i број свесака које је добило i-то дијете, за свако $i = \overline{1,5}$. Тада је број начина на које 30 једнаких свесака можемо распоредити на 5 ученика једнак броју рјешења једначине $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 30$ у скупу природних бројева. Користећи резултат из примјера 5, слиједи рјешење $\binom{29}{4}$.

□

5. На полици се налази 20 књига. На колико начина можемо одабрати 7 књига тако да ма које двије од њих нису биле сусједне на полици?

Рјешење: Нумеришимо књиге на полици редом бројевима: 1,2,...,20. Сада је питање на колико начина из скупа $N_{20} = \{1,2,...,20\}$ можемо формирати подскуп S од 7 елемената т.д. ма која два приридна броја $x, y \in S$ нису сусједи, односно важи $|x-y|>1$. Из Теореме 4. слиједи одговор: $f_1(20,7) = \binom{14}{7}$.

□

6. На колико начина n људи можемо распоредити око округлог стола, ако се два размјештаја А и Б сматрају једнаким ако свако при размјештају А има истог сусједа са лијева, којег је са лијева имао при размјештају Б, и истог сусједа са десна којег је са десна имао при размјештају Б (то јесте два размјештаја су иста до на ротацију скруглог стола)?

Рјешење: Поставимо једног човјека за сто. Сада су сва размјештања одређена односом осталих људи према овом човјеку. Дакле, одговор је $(n-1)!$

□

7. На колико начина за округли сто може сјести 10 брачних парова ако:
а) мушкарци и жене алтернирају (наизмјенично се смјењују)
б) муж и жена једног од тих парова не желе сједјети једно поред другог?
Два размјештаја су иста ако су иста до на ротацију скруглог стола.

Рјешење:
а) $n!(n-1)!$. Једну особу, нпр. једног господина, сједнео на столицу. Сви остали распореди су одређени у односу на њега. Водимо рачуна да мушкарци и жене алтернирају.
б) $(2n-1)! - 2(n-2)!$ Прво нека сједне господин који не жели бити поред своје госпође. Све остале распореде опишимо у односу на њега. Свих могућности (и које су му по вољи и које нису) има $(2n-1)!$. Међу њима је $2(2n-2)!$ њему непожељних распореда.

□

Током недјеље ћу прослиједити још 10 задатака за самосталан рад ученика. Њихова рјешења ће на сајт бити постављена тек наредног викенда.