Dirihleov princip

Goran Popivoda
goc@t-com.me

Prirodno–matematički fakultet

Pretpostavimo da je jato golubova doletjelo u golubarnik. U svojoj originalnoj verziji, *Dirihleov princip* kaže da ako ima više golubova nego kućica u golubarniku, tada će se bar u jednoj kućici naći bar dva goluba. Zbog ovoga se na engleskom govornom području Dirihleov princip naziva *The Pigeonhole Principle.* Naravno, ovaj princip je primjenljiv i na druge objekte, a ne samo na golubove. Smatra se da je Dirihle (G. L. Dirichlet (1805 – 1859) – njemački matematičar) prvi koristio ovu ideju u nekim problemima iz teorije brojeva.

1. Pregled teorije

Dirihleov princip – slaba forma

Ako je $n+1$ predmeta raspoređeno u n kutija, tada će bar jedna kutija sadržati bar 2 predmeta.

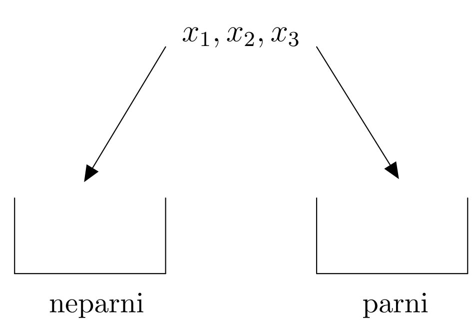
Dokaz. Pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše jedan predmet. Tada je ukupan broj predmeta najviše n, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da ima $n+1$ predmeta. □

Iako je prethodno tvrđenje jedan od najjednostavnijih principa kombinatorike, ako se vješto upotrijebi može biti veoma efikasno. Vještina je da se u konkretnom zadatku pametno odabere šta će biti ”predmeti”, a šta ”kutije”. Zadaci u kojima se traži dokaz egzistencije nekog objekta su često zadaci koji se mogu riješiti pomoću Dirihleovog principa, pa su zadaci tipa ”dokazati da postoji...” prikladni za pokušaj primjene tog principa. Često se takvi zadaci umjesto Dirihleovim principom rješavaju tako što se krene od pretpostavke da tvrđenje ne važi, pa se dođe do kontradikcije. Na ovaj način se dokazuje i Dirihleov princip.

Primjer.

U svakom skupu od tri prirodna broja, bar dva broja su iste parnosti.

Rješenje. Neka je $\{x_1, x_2, x_3\}$ skup od tri prirodna broja. Elemente tog skupa možemo shvatiti kao ”predmete”. Formiramo dvije ”kutije”: kutija za parne i kutija za neparne ”predmete”. Rasporedimo ”predmete” u ”kutije”.



Slika 1.

Na osnovu Dirihleovog principa, bar jedna ”kutija” će sadržati bar dva ”predmeta”, odnosno bar dva broja će biti iste parnosti. □

Primjer.

U svakoj grupi od 13 osoba, postoje dvije osobe rođene u istom mjesecu.

Slaba forma se može iskazati i na sljedeći način:

Neka je S skup od $n+1$ elemenata i neka je

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, \quad k \leqslant n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Tada postoji $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tako da $|A_i| \geqslant 2$.

Jasno, ako je $|S| \geqslant n+1$, onda tvrđenje sigurno važi.

Formalno gledano, prethodno tvrđenje je posljedica teoreme:

Teorema 1. *Neka su S i T konačni skupovi, takvi da važi $|S| > |T|$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada f nije "$1-1$" tj. postoje $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, tako da je $f(x_1) = f(x_2)$.*

Ako imamo m predmeta numerisanih brojevima $1, 2, \ldots, m$ i n kutija numerisanih brojevima $1, 2, \ldots, n$, tada se smještanje objekata u kutije može predstaviti funkcijom $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je $f(x) = y$ ako je predmet x smješten u kutiju y. Po ovoj teoremi, ako je $m > n$, onda funkcija f nije "$1-1$", pa postoje dvije različite vrijednosti x_1 i x_2 tako da je $f(x_1) = f(x_2) = y$, što znači da kutija y sadrži bar dva premeta x_1 i x_2.

Dirihleov princip – jaka forma

Ako je m predmeta raspoređeno u n kutija, tada bar jedna kutija sadrži bar

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$$

predmeta.

Napomena: Sa $\lfloor x \rfloor$ označen je *cijeli dio* realnog broja x tj. najveći cio broj koji nije veći od broja x. Npr. $\lfloor 2.42 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.42 \rfloor = -3$. Lako se uočava da za svaki realan broj x važi

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Dokaz. Ako bismo imali tačno $n \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ predmeta, onda bismo predmete mogli rasporediti u n kutija tako da se u svakoj kutiji nalazi po $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ predmeta. Kako je

$$n \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leqslant n \cdot \frac{m-1}{n} = m - 1 < m,$$

to se u nekoj kutiji mora nalaziti više od $\left\lfloor \dfrac{m-1}{n} \right\rfloor$ predmeta. $\square$

Odgovarajuća matematički preciznija formulacija glasi:

Teorema 2. *Neka su S i T konačni skupovi, $|S| = m$, $|T| = n$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada postoji $t \in T$ tako da je*

$$\left|f^{-1}(t)\right| \geqslant \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1.$$

Primjer.

Dokazati da u grupi od 3000 osoba bar 9 osoba slavi rođendan istog dana.

Rješenje. Rasporedimo date osobe "u kutije" po danu rođenja, tj. "kutije" su dani u godini od 1. januara do 31. decembra (ukupno 366 "kutija", ako uključimo 29. februar). Na osnovu jake forme Dirihleovog principa bar jedna "kutija" sadrži bar

$$\left\lfloor \frac{3000-1}{366} \right\rfloor + 1 = 8 + 1 = 9$$

"predmeta", odnosno bar 9 osoba slavi rođendan istog dana. $\square$

Primjer.

U odjeljenju ima 35 učenika, a u računarskoj učionici je 15 računara. Dokazati da postoji računar za kojim će sjedjeti bar tri učenika.

2. Zadaci

1. Neka je X skup od n osoba. Dokazati da postoje bar dvije osobe iz X koje imaju isti broj poznanika u X. (Pretpostavlja se da je poznanstvo simetrična relacija.)

◀

U skupu X mogu postojati osobe koje nemaju poznanika među ostalima. Tada je broj poznanika za svaku osobu najmanje 0, a najviše $n-2$ (ukupno $n-1$ mogućnosti).

Ako sve osobe imaju bar jednog poznanika, onda je broj poznanika za svaku osobu najmanje 1, a najviše $n-1$ (ukupno $n-1$ mogućnosti).

U oba slučaja, na osnovu Dirihleovog principa, dobijamo da postoje bar dvije osobe iz X koje imaju isti broj poznanika u X.

▶

2. Tablica 5×5 popunjava se brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$, a zatim se izračunaju zbirovi u pojedinim vrstama, kolonama i na obje dijagonale. Dokazati da, kako god popunili tablicu, među tim zbirovima postoje dva jednaka.

◀

Mogući zbirovi su brojevi iz skupa $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Izračunatih zbirova po kolonama ima 5, po vrstama 5, i dva na dijagonalama. Dakle, ukupno 12 zbirova uzima vrijednosti iz 11-članog skupa, pa na osnovu Dirihleovog principa, postoje bar dva jednaka zbira.

▶

3. Na takmičenju iz matematike svaki od pet postavljenih zadataka boduje se sa 0, 1, 2, 3, 4 ili 5 poena. Koliko najmanje takmičara treba da učestvuje na takmičenju da bi među njima postojala dva koja su na svakom zadatku osvojila jednak broj poena?

◀

Rezultat pojedinog učenika je niz $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, gdje je a_i broj poena koje je učenik osvojio na $i-$tom zadatku. Kako je a_i broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, to je broj različitih rezultata (po principu proizvoda) jednak

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776.$$

Na osnovu Dirihleovog principa, najmanji broj takmičara koji garantuje da postoje dva takmičara sa istim brojem poena na svakom zadatku je 7777.

▶

4. Dokazati da u proizvoljnom skupu od $n+1$ prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva sa n.

◀

Ostaci pri dijeljenju sa n su brojevi $0, 1, \ldots, n-1$. Svakom od datih $n+1$ prirodnih brojeva pridružimo ostatak pri dijeljenju sa n. Na osnovu Dirihleovog principa postoje bar dva broja koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa n. Neka su a_i i a_j dva broja (iz tog skupa od $n+1$ brojeva,) koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa n. Tada je razlika $a_i - a_j$ djeljiva sa n.

▶

5. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji broj oblika $11\ldots100\ldots0$ koji je djeljiv sa n.

◀

Posmatrajmo $n+1$ brojeva

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ 111\ldots1$$

i iskoristimo prethodni zadatak.

▶

6. Dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.

◀

Treba dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je broj $3^n - 1$ djeljiv sa 10^4. Ostaci pri dijeljenju sa 10^4 su

$$0, 1, 2, \ldots, 10^4 - 1.$$

Posmatrajmo skup

$$S = \left\{3,\ 3^2,\ 3^3, \ldots, 3^{10^4+1}\right\}.$$

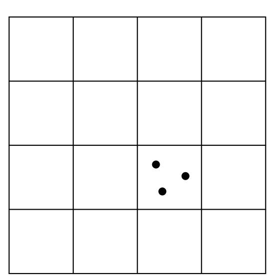
Po Dirihleovom principu, bar dva broja iz S npr. 3^k i 3^l, $k < l$, daju isti ostatak pri dijeljenju sa 10^4, pa je $3^l - 3^k$ djeljivo sa 10^4, tj. $3^k\left(3^{l-k} - 1\right)$ je djeljivo sa 10^4. Kako su 3^k i 10^4 uzajamno prosti brojevi za svako $k \in \mathbb{N}$, to je broj $3^{l-k} - 1$ djeljiv sa 10^4.

▶

7. Unutar kvadrata dužine stranice 1 date su 33 tačke, od kojih nikoje tri nijesu kolinearne. Dokazati da u datom skupu tačaka postoje 3, tako da obim trougla koji određuju nije veći od 1.

◀

Podijelimo kvadrat sa četiri horizontalne i četiri vertikalne prave na 16 kvadratića dužine stranice $\frac{1}{4}$.



Slika 2.

Na osnovu Dirihleovog principa (jaka forma) bar jedan kvadratić sadrži bar $\left\lfloor \dfrac{33-1}{16} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$ tačke. One su po uslovu zadatka nekolinearne i obim trougla koji formiraju nije veći od obima pravouglog trougla čija su tjemena tri tjemena malog kvadrata, a taj obim iznosi

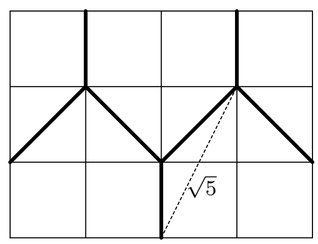
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} < 1.$$

►

8. Unutar pravougaonika, čije stranice imaju dužine 3 i 4, dato je 6 tačaka. Dokazati da u tom skupu tačaka postoje dvije na rastojanju ne većem od $\sqrt{5}$.

◄

Podijelimo pravougaonik 3×4 na 5 mnogouglova kao na slici 3.



Slika 3.

U svakom od tih mnogouglova, maksimalno rastojanje između dvije tačke jednako je $\sqrt{5}$.

Na osnovu Dirihleovog principa, bar jedan mnogougao sadrži bar dvije tačke i rastojanje među njima neće biti veće od $\sqrt{5}$.

►

9. U ravni je dato 25 tačaka tako da za svake tri od tih tačaka postoje dvije čije je rastojanje manje od 1. Dokazati da postoji krug poluprečnika 1 koji sadrži bar 13 od datih tačaka.

◄

Neka je A proizvoljna od datih tačaka i neka je $k(O,1)$ krug s centrom u tački A i poluprečnika 1. Ako su sve date tačke unutar kruga k, onda je k traženi krug.

Ako se sve tačke ne nalaze unutar kruga k, onda među datim tačkama postoji tačka B na rastojanju većem ili jednakom 1 od tačke A. Označimo sa $\ell(B,1)$ krug s centrom u tački B poluprečnika 1.

Svaka od datih tačaka se nalazi unutar bar jednog od krugova k i ℓ. Zaista, ako neka tačka C ne bi bila ni unutar kruga k ni unutar kruga ℓ, onda bi A, B i C bile tri tačke među kojima ne postoje dvije čije je rastojanje manje od 1, a to je suprotno pretpostavci zadatka.

Dakle, na osnovu Dirihleovog principa, bar jedan od krugova k i ℓ sadrži bar 13 tačaka.

►

10. Dokazati da svaki konveksni 21−ugao ima dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od 1°.

◀

Broj dijagonala konveksnog 21−ugla je $\frac{21 \cdot 18}{2} = 189$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da se sve dijagonale sijeku u nekoj tački S. U protivnom transliramo prave koje sadrže dijagonale tako da svaka ostane paralelna sa svojim prvobitnim položajem i da sadrži tačku S; pri tome se uglovi između dijagonala ne mijenjaju. 189 pravih koje sadrže tačku S dijele pun ugao na 378 uglova. Na osnovu Dirihleovog principa, bar jedan od tih uglova neće biti veći od 1°, pa slijedi da postoje dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od 1°.

▶

11. Dokazati da se među $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu naći tri broja tako da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.

◀

Neka je dat skup $S = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$, tako da je $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} < 2n$. Tada važi i

$$a_2 - a_1 < \cdots < a_{n+1} - a_1 < 2n.$$

Od $2n+1$ brojeva

$$a_1, \ldots, a_{n+1}, \quad a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$$

manjih od $2n$, na osnovu Dirihleovog principa, bar dva broja su jednaka. Kako su $a_1, \ldots, a_{n+1}$ međusobno različiti i $a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ međusobno različiti, to postoje $a_k \in S$ i $a_m - a_1 \in \{a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1\}$, $k \neq m$, takvi da je

$$a_k = a_m - a_1,$$

odnosno

$$a_k + a_1 = a_m.$$

▶

12. Dokazati da među $n+1$ različitih elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva koja su uzajamno prosta.

◀

Svaka dva uzastopna prirodna broja su uzajamno prosta. Posmatrajmo dvočlane podskupove skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ koje čine uzastopni brojevi

$$\{1, 2\}, \ \{3, 4\}, \ \{5, 6\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}.$$

Po Dirihleovom principu, među $n+1$ različitih elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje bar dva koji pripadaju istoj od ovih n grupa, pa su ta dva broja uzajamno prosta.

▶

13. Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ skup od 5 prirodnih brojeva. Dokazati da za proizvoljnu permutaciju $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}a_{i_5}$ skupa A proizvod

$$(a_{i_1} - a_1)(a_{i_2} - a_2)\dots(a_{i_5} - a_5)$$

je uvijek paran.

◀

Da dokažemo da je proizvod paran dovoljno je dokazati postojanje parnog činioca $a_{i_k} - a_k$. Broj $a_{i_k} - a_k$ je paran akko su brojevi a_{i_k} i a_k iste parnosti. U skupu A ima 5 elemenata, pa su na osnovu Dirihleovog principa, bar 3 elementa iste parnosti. Neka su to npr. a_1, a_2, a_3. Primijetimo da je

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\} \cap \{a_1, a_2, a_3\} \neq \varnothing$$

(u suprotnom bi skup A imao 6 elemenata). Dakle, možemo pretpostaviti da je npr. $a_1 = a_{i_3}$. Ovo povlači da je $a_{i_3} - a_3 = a_1 - a_3$ paran broj, jer su a_1 i a_3 iste parnosti.

▶

14. Neka je $X \subset \{1, 2, \dots, 99\}$ kardinalnosti 10. Dokazati da je moguće izabrati dva disjunktna neprazna prava podskupa Y i Z skupa X tako da je $\sum\limits_{y\in Y} y = \sum\limits_{z\in Z} z$.

◀

Npr. ako je $X = \{2, 7, 15, 19, 23, 50, 56, 60, 66, 99\}$ odgovarajući skupovi su npr. $Y = \{19, 50\}$ i $Z = \{2, 7, 60\}$.

Za "predmete" uzimamo neprazne prave podskupove od X, a "kutije" formiramo kao sve moguće zbirove njihovih elemenata. Kako je $|X| = 10$, to je broj pravih nepraznih podskupova skupa X (isključujemo $\varnothing$ i X) jednak

$$2^{10} - 2 = 1022.$$

Sa druge strane za svaki pravi neprazni podskup A skupa X važi

$$1 \leqslant \sum_{a\in A} a \leqslant 91 + 92 + \cdots + 99 = 855,$$

odnosno zbir brojeva svakog pravog nepraznog podskupa A je između 1 i 855.

Sada posmatrajmo 1022 neprazna prava podskupa od X kao 1022 predmeta, i formirajmo "855 kutija" za sume $1, 2, \dots, 855$. Kako je $1022 > 855$, to na osnovu Dirihleovog principa postoje bar dva neprazna prava podskupa B, C skupa X sa jednakim zbirom elemenata. Uočimo da B i C ne moraju biti disjunktni. Jasno, $B \not\subset C$ i $C \not\subset B$, pa ako uzmemo $Y = B \backslash (B \cap C)$ i $Z = C \backslash (B \cap C)$ dobijamo tražene podskupove.

▶

15. Neka je S skup od $2n+1$ realnih brojeva iz intervala $(1, 2^n)$. Dokazati da postoje tri broja skupa S koja su dužine stranica nekog trougla.

◀

Podijelimo interval $(1, 2^n)$ na n različitih intervala

$$(1,2), \quad \left[2, 2^2\right), \quad \left[2^2, 2^3\right), \ldots, \left[2^{n-1}, 2^n\right).$$

Na osnovu Dirihleovog principa, postoji interval $\left[2^k, 2^{k+1}\right)$, koji sadrži bar tri od datih $2n+1$ brojeva. Označimo sa a, b i c tri broja koja pripadaju intervalu $\left[2^k, 2^{k+1}\right)$.

Kako važi

$$a+b \geqslant 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} > c,$$
$$a+c \geqslant 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} > b,$$

i

$$b+c \geqslant 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} > a,$$

to tvrđenje slijedi.

▶

16. Dokazati da se među bilo kojih 13 uzastopnih prirodnih brojeva postoji broj kod koga je zbir cifara djeljiv sa 7. Dokazati da tvrđenje ne važi ako se broj 13 zamijeni brojem 12.

◀

Neka je n prirodan broj. Među brojevima $n, n+1, n+2, \ldots, n+13$, na osnovu Dirihleovog principa, bar 7 uzastopnih brojeva je sa istom cifrom desetica (razmotrite slučaj kada je cifra jedinica broja n 8 ili 9 i slučaj kada je cifra jednica tog broja manja od 8). Njihovi zbirovi cifara su sedam uzastopnih prirodnih brojeva, pa je bar jedan od njih djeljiv sa 7.

Broj 13 u postavci zadatka se ne može zamijeniti manjim brojem: među 12 brojeva

$$994, 995, \ldots, 1004, 1005$$

nema broja kod koga je zbir cifara djeljiv sa 7.

▶

17. Neka je $S \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $|S| = n+1$. Dokazati da postoje $a, b \in S$ tako da je broj a djeljiv sa b.

◀

Svaki broj iz S je moguće zapisati kao $2^i \cdot \alpha$ za neki broj $i \in \mathbb{N}_0$ i neki neparan prirodan broj α manji od $2n$. Definišimo

$$C_\alpha = \left\{ x \in S \mid x = 2^i \cdot \alpha \text{ za neko } i \in \mathbb{N}_0 \right\}, \ \alpha = 2k-1, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

$C_1, C_3, \ldots, C_{2n-1}$ čine particiju skupa S na n klasa. Na osnovu Dirihleovog principa bar dva od $n+1$ brojeva iz S će pripasti istoj klasi, neka su to $2^k \cdot \alpha$ i $2^l \cdot \alpha$, $k < l$. Tada je $a = 2^l \cdot \alpha$ djeljiv brojem $b = 2^k \cdot \alpha$.

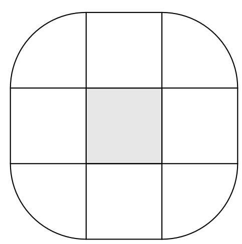
Komentar. Ako je $|S| = n$ tvrđenje ne mora da važi. Npr. $S = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ ne zadovoljava zahtjev zadatka.

▶

18. Unutar kvadrata dužine stranice 15 raspoređeno je 20 kvadrata dužine stranice 1. Dokazati da se unutar datog "velikog" kvadrata može smjestiti krug poluprečnika 1, koji nema zajedničkih tačaka ni sa jednim od 20 jediničnih kvadrata.

◀

Oko svakog od 20 jediničnih kvadrata konstruišimo figuru koja sadrži sve tačke čije rastojanje od tog kvadrata nije veće od 1 (konstruišemo 4 jedinična kvadrata nad svakom od stranica, a potom između svaka dva nova kvadrata "upišemo" jedinični kružni isječak – četvrtinu jediničnog kruga). Jedna takva figura data je na slici 3.



Slika 3.

Zbir površina svih takvih figura jednak je

$$(5+\pi) \cdot 20 < 169 = 13^2,$$

pa u kvadratu dužine stranice 13, koji ima zajednički centar i paralelne stranice sa kvadratom dužine stranice 15, postoji tačka O koja nije sadržana ni u jednoj od 20 figura površine $(5+\pi)$. Krug s centrom u tački O i poluprečnikom 1 nalazi se unutar "velikog" kvadrata i nema zajedničkih tačaka ni sa jednim od 20 kvadrata dužine stranice 1.

▶

3. Zadaci za samostalan rad

1. Dat je skup koji sadrži 7 prirodnih brojeva od kojih svi daju različite ostatke pri dijeljenju sa 20. Dokazati da se među tim brojevima mogu izabrati četiri broja a, b, c, d tako da je broj $a + b - c - d$ djeljiv sa 20.

2. Unutar kvadrata dužine stranice 1 dato je nekoliko kružnica, tako da je zbir obima tih kružnica jednak 10. Dokazati da postoji prava koja siječe bar četiri od tih kružnica.

3. U krugu poluprečnika 1 povučeno je nekoliko tetiva. Zbir dužina svih tih tetiva veći je od 7π. Dokazati da postoji prečnik tog kruga koji siječe bar osam tetiva.

4. Svaka od 9 pravih dijeli kvadrat na dva četvorougla čije se površine odnose kao $2 : 3$. Dokazati da postoje tri od tih devet pravih koje se sijeku u jednoj tački.